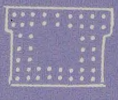
THÉORIE DES CORPS DÉFORMABLES

EUGENE MAURICE PIERRE COSSERAT



THE CORNELL UNIVERSITY LIBRARY DIGITAL COLLECTIONS

Production Note

Cornell University Library produced this volume to replace the irreparably deteriorated original. It was scanned using Xerox software and equipment at 600 dots per inch resolution and compressed prior to storage using CCITT Group 4 compression. The digital data were used to create Cornell's replacement volume on paper that meets the ANSI Standard Z39.48-1984. The production of this volume was supported in part by the Commission on Preservation and Access and the Xerox Corporation. 1991.

Cornell University Library

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE
SAGE ENDOWMENT FUND
THE GIFT OF
Henry W. Sage
1891

A237043. MATHEMATICS 30/VIII/09.

3513-1

THÉORIE

DES

CORPS DÉFORMABLES

PAR

E. COSSERAT
Professeur à la Faculté des Sciences,
Directeur
de l'Observatoire de Toulouse

F. COSSERAT
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Ingénieur en Chef
à la Cie des Chemins de fer de l'Est

7119

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1909

THÉORIE

DES

CORPS DÉFORMABLES

THÉORIE

DES

CORPS DÉFORMABLES

PAR

E. COSSERAT
Professeur à la Faculté des Sciences,
Directeur
de l'Observatoire de Toulouse

F. COSSERAT
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées,
Ingénieur en Chef
à la Cie des Chemins de fer de l'Est

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1909

Eu.

AVANT-PROPOS

Ce volume contient le développement d'une note sommaire sur la *Théorie de l'action euclidienne* que M. Appell a bien voulu introduire dans la 2e édition de son *Traité de mécanique rationnelle*. Il est la reproduction d'un appendice à l'édition française du *Traité de physique* de M. Chwolson, ce qui explique quelques particularités de rédaction et les renvois que nous faisons à un travail antérieur sur la dynamique du point et du corps invariable, ajouté également à l'ouvrage du savant russe. Nous avons profité de cette nouvelle impression pour corriger quelques fautes dans notre texte.

Nous ne cherchons pas à déduire actuellement toutes les conséquences des résultats généraux auxquels nous sommes parvenus ; nous nous attachons surtout à retrouver et à éclaircir les doctrines classiques. Pour que cette sorte de vérification de la Théorie de l'action euclidienne apparaisse plus complète, nous aurions dû, dans chacune des parties de notre exposition, établir la forme que prennent les équations des corps déformables, quand on se borne à considérer des *états infiniment voisins* ; mais c'est un point dont nous nous sommes déjà occupés, avec tous les détails nécessaires, dans le *Premier mémoire sur la Théorie de l'élasticité* que nous avons écrit en 1896 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, tome X). Nous supposons d'ailleurs que les Leçons magistrales de M. G. Darboux sur la *Théorie générale des surfaces* sont tout à fait familières au lecteur.

Nos recherches ne pourront prendre tout leur sens que lorsque nous aurons montré comment, dans la voie que nous parcourons, on peut envisager les théories de la chaleur et de l'électricité. Nous consacrerons à ce sujet deux notes dans les tomes III et IV du traité de M. Chwolson.

Le *morcelage*, pour employer la langue du pragmatisme, paraît une nécessité scientifique ; pourtant, on ne doit pas perdre de vue qu'il soulève des questions graves. Nous avons essayé de donner une idée de ces difficultés dans une note sur la *Théorie des corps minces*, publiée en 1908 dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences et dont le Traité de M. Appell indique aussi la substance.

E. & F. Cosserat

THÉORIE

DES

CORPS DÉFORMABLES

par MM. E. et F. COSSERAT

I. — CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

1. Développement de l'idée de milieu continu. — La notion de corps déformable a joué, au siècle dernier, un rôle important dans le développement de la Physique théorique, et FRESNEL (1) doit être regardé, à l'égal de NAVIER, de POISSON et de CAUCHY (2), comme l'un des précurseurs de la théorie actuelle de l'élasticité. Sous l'influence des idées newtoniennes, on ne considérait encore au temps de ces savants que des systèmes discrets de points. Avec les mémorables recherches de G. GREEN (3), ont apparu les systèmes ponctuels continus. On a essayé depuis d'élargir la conception de GREEN, qui est insuffisante pour donner à la doctrine des ondes lumineuses toute sa portée. LORD KELVIN (4), en particulier, s'est attaché à définir des milieux continus en chaque point desquels peut s'exercer un moment. La même tendance s'accuse chez HELMHOLTZ (5), dont la controverse avec J. BERTRAND (6), à l'égard de la théorie du magnétisme, est très caractéris-

(1) FRESNEL. — *Œuvres complètes*, Paris, 1866 ; voir l'introduction de É. VERDET.

(2) Voir ISAAC TODHUNTER et KARL PEARSON. — *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials, from* GALILEI *to the present time*, Vol. I, GALILEI to SAINT-VENANT, 1886 ; Vol. II, Part I et II, SAINT-VENANT to LORD KELVIN, 1893. Cet ouvrage remarquable contient une analyse très complète et très précise des travaux des fondateurs de la théorie de l'élasticité.

(3) G. GREEN. — *Math. Papers*, édited by N. M. FERRERS, fac-similé reprint, Paris, A. Hermann, 1903.

(4) LORD KELVIN. — *Math. and phys. Papers*, volume I, 1882 ; vol. II, 1884 ; vol. III, 1890 ; *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, 2e éd. 1884 ; *Baltimore Lectures on Molecular Dynamics and the Wave Theory of Light*, 1904 ; W. THOMSON et P. G. TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, 1e éd. Oxford 1867 ; 2e éd. Cambridge 1879-1883.

(5) HELMHOLTZ. — *Vorles. über die Dynamik diskreter Massenpunkte*, Berlin 1897 ; *Vorles. über die elektromagnetische Theorie des Lichtes*, Leipzig 1897 ; *Wiss. Abhandl.* 3 vol. Leipzig, 1892-1895.

(6) J. BERTRAND. — *C. R.* **73**, p. 965 ; **75**, p. 860 ; **77**, p. 1049 ; voir aussi H. POINCARÉ, *Electricité et Optique*, II, *Les théories de* Helmholtz *et les expériences de* HERTZ, Paris, 1891, p. 51 ; 2e éd. 1901, p. 275.

tique. On peut faire remonter l'origine de cette évolution, d'une part aux conceptions introduites dans la Résistance des matériaux par BERNOULLI et EULER (1), d'autre part à la théorie des couples de POINSOT (2). On se trouve ainsi naturellement conduit à réunir, sous une même définition géométrique, les divers concepts de corps déformables que l'on rencontre aujourd'hui dans la Philosophie naturelle. *Une ligne déformable est un ensemble continu à un paramètre de trièdres, une surface déformable un ensemble à deux paramètres, un milieu déformable un ensemble à trois paramètres* ρ_i *; quand il y a mouvement, il faut ajouter le temps t à ces paramètres géométriques* ρ_i. La continuité mathématique que l'on suppose dans une telle définition laisse, comme on voit, subsister en chaque point la trace d'un solide invariable ; on peut par suite prévoir qu'au point de vue mécanique apparaîtront les moments bien connus que l'on étudie, depuis EULER et BERNOULLI, dans la ligne et dans la surface élastiques, et que LORD KELVIN et HELMHOLTZ ont cherché à retrouver dans les milieux à trois dimensions.

2. Difficultés que présente l'application de la méthode inductive dans la Mécanique. — La forme première de la Mécanique est inductive ; c'est ce qu'on aperçoit nettement dans la théorie des corps déformables. Cette théorie a d'abord emprunté à la mécanique des corps invariables les propositions relatives à la notion de force statique, que l'on a appliquées par le principe de solidification ; puis la relation entre l'effort et la déformation a été établie hypothétiquement (loi de HOOKE généralisée), et l'on a cherché *a posteriori* sous quelles conditions l'énergie était conservée (GREEN). CARNOT (3) signalait déjà, il y a un siècle, le défaut de cette méthode, où l'on fait constamment appel à des notions *a priori* et où la voie suivie n'est pas toujours très sûre. La force statique n'a pas en effet de définition constructive, dans notre forme classique de la Mécanique, et la portée de la réforme que REECH (4)

(1) Voir TODHUNTER et PEARSON. — *Ouvrage cité.*

(2) AUGUSTE COMTE. — *Cours de Philosophie positive*, 5e éd. Paris, 1907, Tome I, page 338 : « Quelles que soient, en réalité, les qualités fondamentales de la conception de M. POINSOT, par rapport à la statique, on doit néanmoins reconnaître, ce me semble, que c'est surtout au perfectionnement de la dynamique qu'elle se trouve par sa nature, essentiellement destinée ; et je crois pouvoir assurer, à cet égard, que cette conception n'a point encore exercé jusqu'ici son influence la plus capitale. »

(3) CARNOT, dans son *Essai* de 1783 *sur les machines en général*, qui devint en 1803, *les Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement*, a cherché à ramener la mécanique à des principes et des définitions précises entièrement dépouillées de tout caractère métaphysique et de tous les termes vagues sur lesquels les philosophes disputent sans s'entendre. Cette réaction entraîna CARNOT un peu trop loin, car il alla jusqu'à contester la légitimité de l'expression de force, notion obscure suivant lui, et à laquelle il voulut substituer exclusivement l'idée du mouvement. Par la même raison, il ne pouvait admettre comme rigoureuse aucune des démonstrations connues de la règle du parallélogramme des forces, « la seule existence du mot force, dans l'énoncé de la proposition, rendant cette démonstration impossible par la nature même des choses. » (CH. COMBES, ED. PHILLIPS et ED. COLLIGNON, *Exposé de la situation de la mécanique appliquée*, Paris 1867).

(4) F. REECH. — *Cours de Mécanique, d'après la nature généralement flexible et élastique des corps*, Paris 1852. Cet ouvrage a été écrit par l'illustre ingénieur de la Ma-

a proposée à cet égard en 1852 est restée presque méconnue jusqu'à notre temps. Peut-être cela est-il dû à la longue incertitude dans laquelle sont restés les élasticiens sur le fondement rationnel que l'on peut donner à la loi de Hooke. Des hésitations analogues se sont d'ailleurs manifestées, presque sous la même forme, dans tous les autres domaines de la Physique (1).

Pour échapper à ces difficultés, Helmholtz a essayé de construire ce qu'on appelle l'*énergétique*, qui repose sur le principe de moindre action et sur l'idée même d'énergie, la force, quelle que soit sa nature, devenant alors une notion secondaire et d'origine déductive. Mais le principe d'un minimum dans les phénomènes naturels (2), le concept d'énergie (3) lui-même nous replacent devant les défauts de la méthode inductive. Pourquoi un minimum et quelle définition donner de l'énergie pour ne pas avoir simplement une théorie physique, mais une théorie vraiment mécanique ? Helmholtz ne paraît pas avoir laissé de réponse à ces questions. Il a contribué pourtant à établir plus complètement qu'on ne l'avait fait avant lui la distinction entre deux notions, qui sont en apparence confondues dans la dynamique classique, l'énergie et l'action. C'est de cette dernière qu'il faut partir, croyons-nous, pour rendre tout à fait précises les vues d'Helmholtz et pour donner à la Mécanique, ou plus généralement à la Physique théorique, une forme parfaitement déductive.

3. Théorie de l'action euclidienne. — Quand il s'agit du mouvement d'un point, l'élément essentiel qui entre dans la définition de l'action est la distance euclidienne entre deux positions infiniment voisines du point mobile. Nous avons montré précédemment (4) que l'on déduit de cette seule notion

rine pour la réforme de l'enseignement de la Mécanique à l'Ecole Polytechnique. Ses idées ont été exposées depuis par J. Andrade, *Leçons de mécanique physique*, Paris 1898, et par Marbec, ingénieur en chef de la Marine, dans son enseignement élémentaire de la Mécanique à l'Ecole de Maistrance de Toulon (1906). Voir aussi J. Perrin, *Traité de Chimie physique, les Principes*, Paris, 1903.

(1) La remarque de Lord Kelvin, dans ses *Baltimore Lectures* p. 131, sur les travaux de Blanchet, est particulièrement intéressante à cet égard ; il signale que Poisson, Coriolis et Sturm (*C. R.* **7**, p. 1143), ainsi que Cauchy, Liouville et Duhamel (1841) ont laissé passer sans objection les 36 coefficients que Blanchet avait admis dans la loi généralisée de Hooke. Lord Kelvin a aussi combattu au même point de vue la loi de force à distance de Weber, dans la 1e édition de la *Natural Philosophy*. Plus récemment, l'application de la loi adiabatique statique à l'étude des ondes d'amplitude finie a été critiquée pour les mêmes raisons par Lord Rayleigh, et on sait qu'Hugoniot a proposé une loi adiabatique dynamique.

(2) Maupertuis avait lui-même senti le danger du principe qu'il a introduit dans la Mécanique, lorsqu'il écrivait en 1744 : « Nous ne connaissons pas assez *quel est le but* de la nature, et nous pouvons nous méprendre sur la quantité que nous devons regarder comme sa dépense, dans la production de ses effets. » Lagrange eut d'abord l'intention de faire du principe de moindre action la base de sa *Mécanique analytique*, mais plus tard il reconnut la supériorité de la méthode qui consiste à considérer les travaux virtuels.

(3) Hertz, *Die Prinzipien der Mechanik, etc.*, 1894 ; voir en particulier l'introduction.

(4) *Note sur la dynamique du point et du corps invariable*, Tome I, page 236.

toutes les définitions fondamentales de la dynamique classique, celles de quantité de mouvement, de force et d'énergie.

Nous nous proposons actuellement d'établir que l'on peut suivre une voie identique, dans l'étude de la déformation statique ou dynamique des systèmes discrets de points et des corps continus, et qu'on arrive ainsi à construire une *théorie générale de l'action sur l'étendue et le mouvement*, qui embrasse tout ce qui, dans la Physique théorique, est directement assujetti aux lois de la Mécanique.

L'action sera également ici l'intégrale d'une fonction de deux éléments infiniment voisins dans le temps et dans l'espace du milieu considéré. En introduisant la condition d'invariance dans le groupe des déplacements euclidiens et en définissant le milieu comme nous l'avons indiqué au § 1, *la densité de l'action en un point aura la même forme remarquable que celle que nous avons déjà rencontrée dans la dynamique du point et du corps invariable.* Soient, avec les notations des *Leçons* de M. Darboux, (ξ_i, η_i, ζ_i), (p_i, q_i, r_i) les vitesses géométriques de translation et de rotation du trièdre élémentaire, et (ξ, η, ζ), (p, q, r) les vitesses analogues relatives au mouvement de ce trièdre ; l'action sera l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \int \dots \int W\,(\rho_i, t\,;\, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i\,;\, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)\, d\rho_1, \dots d\rho_i, \dots dt.$$

Il suffira de considérer la variation de cette action, pour être conduit à la définition de la quantité de mouvement, à celles de l'effort et du moment de déformation, de la force et du moment extérieurs, enfin à celle de l'énergie de déformation et de mouvement, par l'intermédiaire de la notion de travail.

Dans cette théorie, la Statique pourra devenir entièrement autonome, conformément aux vues de Carnot et de Reech ; on n'aura qu'à prendre pour cela une densité d'action W indépendante des vitesses (ξ, η, ζ), (p, q, r), c'est-à-dire à considérer un corps *sans inertie*, ou encore un corps doué d'inertie à condition de regarder la déformation comme une *transformation réversible* au sens de M. Duhem. D'autre part, en faisant appel à la notion des *arguments cachés*, on retrouvera tous les concepts d'origine mécanique qui sont employés dans la Physique, par exemple ceux de ligne flexible et inextensible, de surface flexible et inextensible, de corps invariable, ainsi que les définitions moins particulières qui ont été proposées pour la ligne déformable depuis D. Bernoulli et Euler jusqu'à Thomson et Tait, pour la surface déformable depuis Sophie Germain et Lagrange jusqu'à Lord Rayleigh, pour le milieu déformable depuis Navier et Green jusqu'à Lord Kelvin et W. Voigt.

En envisageant à la fois la déformation et le mouvement, on arrivera d'une manière purement déductive à l'idée que contient le principe de d'Alembert, qui se rapporte seulement au cas où *l'action de déformation se sépare complètement de l'action cinétique*. Enfin, si l'on suppose que le corps déformable n'est soumis à aucune action du monde extérieur et si l'on introduit par suite la notion

fondamentale de *système isolé*, dont M. Duhem (1), et ensuite M. Le Roy (2), ont fait voir la nécessité pour la construction rationnelle de la Physique théorique, on sera amené naturellement à l'idée de minimum qu'Helmholtz avait prise pour point de départ, en même temps qu'apparaîtra le principe de la conservation de l'énergie, qui est à la base de notre système scientifique actuel.

On évitera donc finalement, semble-t-il, toutes les difficultés et les tâtonnements de la recherche inductive, dont nous avons parlé précédemment.

4. La critique des principes de la Mécanique. — Telle que nous venons de l'esquisser, la théorie de l'action euclidienne apporte une première contribution à la critique des principes de la Mécanique.

Sa généralité permet de prévoir qu'il y a des phénomènes singuliers aussi bien dans l'action sur le mouvement que dans la déformation de l'étendue, par exemple l'allure des solides dans l'état plastique ou voisin de la rupture, et celle des fluides sous de grands efforts (3). Dans les circonstances ordinaires, cette généralité peut-être réduite par la considération de l'état infiniment voisin de l'état naturel ; c'est un point dont nous avons déjà parlé dans notre note précédente.

Mais on peut encore supposer qu'une ou plusieurs dimensions du corps déformable deviennent infiniment petites et envisager ce qu'on appelle un *corps mince* (4). Cette notion a été développée en 1828 par Poisson et aussi, peu après, par Cauchy ; leur but, comme celui de tous les élasticiens qui se sont occupés plus tard de cette question ardue, a été d'établir un passage entre les théories distinctes des corps à une, deux, trois dimensions. On sait qu'une part très importante de l'œuvre de Barré de Saint-Venant et de Kirchhoff se rattache à la discussion des recherches de Poisson et de Cauchy. Cependant ces savants, et depuis leurs disciples, n'ont pas dégagé la véritable difficulté de la question ; cette difficulté consiste en ce que, *généralement, la valeur zéro du paramètre qui s'introduit n'est pas un point ordinaire, comme l'ont admis* Poisson *et* Cauchy, *ni même un pôle, mais un point singulier essentiel. Ce fait important justifie les études séparées* de la ligne, de la surface et du milieu que l'on trouvera dans le présent travail (5).

Nous ferons remarquer, en terminant ces observations préliminaires, que

(1) P. Duhem. — *Commentaire aux principes de la Thermodynamique*, 1892 ; *la Théorie physique, son objet et sa structure*, 1906.

(2) E. Le Roy. — *La Science positive et les philosophies de la liberté, Congrès int. de Philosophie*, T. I, 1900.

(3) E. et F. Cosserat. — *Sur la mécanique générale, C. R.* **145**, p. 1139, 1907.

(4) E. et F. Cosserat. — *Sur la théorie des corps minces, C. R.* **146**, p. 169, 1908.

(5) Il faut que l'intérêt et l'importance des théories de la ligne et de la surface déformables soient aujourd'hui mal appréciés, pour que l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*, qui se publie actuellement en Allemagne, ne leur ait pas fait une place. W. Thomson et Tait se sont gardés, dans leur *Natural Philosophy*, de les omettre ainsi, et ils les ont présentées *avant* celle des corps élastiques à trois dimensions ; de même, P. Duhem, *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, Paris, 1891.

la théorie de l'action euclidienne repose sur la notion d'*invariant différentiel*, prise sous sa forme la plus simple. Si l'on élargit cette notion de manière à y comprendre l'idée de *paramètre différentiel*, la Physique théorique moderne apparaît comme un prolongement immédiat, *au point de vue eulérien*, de la Mécanique proprement dite, et l'on se trouve naturellement conduit aux principes de la théorie de la chaleur et aux doctrines électriques actuelles. Ce nouveau champ de recherches, dans lequel nous commencerons à entrer ici en déduisant de la considération des corps déformables l'idée de radiation de l'énergie, sera exploré plus complètement dans un travail ultérieur. Nous pourrons ainsi introduire une précision nouvelle dans les vues de H. Lorentz (1) et de H. Poincaré (2) sur ce qu'on appelle, dans la Mécanique, le *principe de réaction*.

II. — STATIQUE DE LA LIGNE DÉFORMABLE

5. Ligne déformable. Etat naturel et état déformé. — Considérons une courbe (M_0) décrite par un point M_0, dont les coordonnées x_0, y_0, z_0, par rapport à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, sont des fonctions d'un même paramètre, que nous supposerons dans ce qui suit égal à l'arc s_0 de la courbe, compté à partir d'une origine déterminée dans un sens déterminé. Adjoignons à chaque point M_0 de la courbe (M_0) un trièdre trirectangle dont les axes $M_0x'_0$, $M_0y'_0$, $M_0z'_0$ ont, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, des cosinus directeurs qui sont respectivement α_0, α'_0, α''_0 ; β_0, β'_0, β''_0 ; γ_0, γ'_0, γ''_0 et qui sont des fonctions du même paramètre s_0.

L'ensemble continu à une dimension de tels trièdres $M_0x'_0y'_0z'_0$ sera ce que nous appellerons une *ligne déformable*.

Donnons au point M_0 un déplacement M_0M ; soient x, y, z les coordonnées du point M par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz. Imprimons en outre au trièdre $M_0x'_0y'_0z'_0$ une rotation, qui amènera finalement ses axes à être ceux d'un trièdre $Mx'y'z'$ que nous adjoindrons au point M ; nous définirons cette rotation, en nous donnant les cosinus directeurs α, α', α'' ; β, β', β'' ; γ, γ', γ'' des axes Mx', My', Mz' par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz.

L'ensemble continu à une dimension des trièdres $Mx'y'z'$ sera ce que nous appellerons l'*état déformé* de la ligne déformable considérée qui, dans son état primitif, sera dite à l'*état naturel*.

6. Eléments cinématiques relatifs aux états de la ligne déformable. — Supposons que s_0 varie et que, pour un instant, nous lui fassions ouer le rôle du temps ; en employant les notations de M. Darboux (3), nous désignerons alors par ξ_0, η_0, ζ_0 les projections de la vitesse de l'origine M_0 des axes $M_0x'_0$, $M_0y'_0$, $M_0z'_0$ sur ces axes, et par p_0, q_0, r_0 les projections sur les mêmes axes de la vitesse de la rotation instantanée du trièdre $M_0x'_0y'_0z'_0$. Nous

(1) H. Lorentz. — *Versuch einer Theorie der elcctrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern*, Leiden 1895 ; réimprimé à Leipzig en 1906. *Abhandl. über theoretische Physik*, 1907 ; *Encyklop. der Math. Wissenschaften*, V_2, *Elektronen theorie*, 1903.

(2) H. Poincaré. — *Electricité et Optique*, 2e éd., 1901, p. 448.

(3) G. Darboux. — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. T. I, Paris, 1887.

désignerons par ξ, η, ζ et par p, q, r les quantités analogues pour le trièdre $Mx'y'z'$, lorsqu'on le rapporte, comme le trièdre $M_0x'_0y'_0z'_0$, au trièdre fixe $Oxyz$.

Les éléments que nous venons d'introduire se calculent de la façon habituelle ; en particulier, on a :

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \alpha \dfrac{dx}{ds_0} + \alpha' \dfrac{dy}{ds_0} + \alpha'' \dfrac{dz}{ds_0}, \\ \eta = \beta \dfrac{dx}{ds_0} + \beta' \dfrac{dy}{ds_0} + \beta'' \dfrac{dz}{ds_0}, \\ \zeta = \gamma \dfrac{dx}{ds_0} + \gamma' \dfrac{dy}{ds_0} + \gamma'' \dfrac{dz}{ds_0}, \end{cases} \qquad (2)\quad \begin{cases} p = \sum \gamma \dfrac{d\beta}{ds_0} = -\sum \beta \dfrac{d\gamma}{ds_0}, \\ q = \sum \alpha \dfrac{d\gamma}{ds_0} = -\sum \gamma \dfrac{d\alpha}{ds_0}, \\ r = \sum \beta \dfrac{d\alpha}{ds_0} = -\sum \alpha \dfrac{d\beta}{ds_0}. \end{cases}$$

Avec ces quantités, l'élément linéaire ds de la courbe décrite par le point M est défini par la formule :

$$(3)\qquad ds^2 = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, ds_0^2.$$

Désignons par x', y', z' les projections du segment OM sur les axes Mx', My', Mz', en sorte que les coordonnées, par rapport à ces axes, du *point fixe* O seront $-x'$, $-y'$, $-z'$. Nous aurons les formules connues :

$$(4)\quad \xi - \frac{dx'}{ds_0} - qz' + ry' = 0, \quad \eta - \frac{dy'}{ds_0} - rx' + pz' = 0, \quad \zeta - \frac{dz'}{ds_0} - py' + qx' = 0,$$

qui donnent de nouvelles expressions de ξ, η, ζ.

7. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé. — Supposons qu'on imprime à chacun des trièdres de l'état déformé un déplacement infiniment petit pouvant varier d'une façon continue avec ces trièdres. Désignons par δx, δy, δz ; $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ les variations respectives de x, y, z ; x', y', z' ; α, α', ... γ''. Les variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ s'expriment par des formules telles que la suivante :

$$(5)\qquad \delta\alpha = \beta\delta\kappa' - \gamma\delta\iota',$$

au moyen des trois auxiliaires $\delta\iota'$, $\delta\iota'$, $\delta\kappa'$, qui sont les composantes suivant Mx', My', Mz' de la rotation instantanée bien connue attachée au déplacement infiniment petit considéré. Les variations δx, δy, δz sont les projections sur Ox, Oy, Oz du déplacement infiniment petit éprouvé par le point M ; les projections $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ de ce déplacement sur Mx', My', Mz' s'en déduisent immédiatement et ont pour valeurs :

$$(6)\quad \delta' x = \delta x' + z'\delta\iota' - y'\delta\kappa', \quad \delta' y = \delta y' + x'\delta\kappa' - z'\delta\iota', \quad \delta' z = \delta z' + y'\delta\iota' - x'\delta\iota'.$$

Proposons-nous de déterminer les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, δp, δq, δr éprouvées respectivement par ξ, η, ζ, p, q, r. D'après les formules (2), nous avons :

$$\delta p = \sum \left(\frac{d\beta}{ds_0}\delta\gamma + \gamma \frac{d\delta\beta}{ds_0} \right),$$

$$\delta q = \sum \left(\frac{d\gamma}{ds_0}\delta\alpha + \alpha \frac{d\delta\gamma}{ds_0} \right),$$

$$\delta r = \sum \left(\frac{d\alpha}{ds_0}\delta\beta + \beta \frac{d\delta\alpha}{ds_0} \right).$$

Remplaçons $\delta\alpha$ par sa valeur $\beta\delta\kappa' - \gamma\delta\lambda'$, et $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ par leurs valeurs analogues ; il vient

$$(7)\quad \delta p = \frac{d\delta\iota'}{ds_0} + q\delta\kappa' - r\delta\lambda', \quad \delta q = \frac{d\delta\lambda'}{ds_0} + r\delta\iota' - p\delta\kappa', \quad \delta r = \frac{d\delta\kappa'}{ds_0} + p\delta\lambda' - q\delta\iota'.$$

Les formules (4) nous donnent de même trois formules dont la première est :

$$\delta\xi = \frac{d\delta x'}{ds_0} + q\delta z' - r\delta y' + z'\delta q - y'\delta r ;$$

remplaçons δp, δq, δr par leurs valeurs données par les formules (7) ; il vient :

$$(8)\quad \begin{cases} \delta\xi = \eta\delta\kappa' - \zeta\delta\lambda' + \dfrac{d\delta' x}{ds_0} + q\delta' x - r\delta' y, \\ \delta\eta = \zeta\delta\iota' - \xi\delta\kappa' + \dfrac{d\delta' y}{ds_0} + r\delta' y - p\delta' z, \\ \delta\zeta = \xi\delta\lambda' - \eta\delta\iota' + \dfrac{d\delta' z}{ds_0} + p\delta' z - q\delta' x, \end{cases}$$

en introduisant, pour abréger l'écriture, les trois symboles $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ définis par les formules (6).

8. Action euclidienne de déformation sur une ligne déformable. — Considérons une fonction W de *deux positions infiniment voisines* du trièdre $Mx'y'z'$, c'est-à-dire une fonction de s_0, de x, y, z, α, α', ..., γ'' et de leurs dérivées premières par rapport à s_0. Proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour que l'intégrale

$$\int W ds_0,$$

étendue à une portion quelconque de la ligne (M_0), ait une variation nulle, quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres de la ligne déformable, prise dans son état déformé, *à une même transformation infinitésimale quelconque du groupe des déplacements euclidiens*.

Il s'agit, en définitive, de déterminer W de façon que l'on ait :

$$\delta W = 0,$$

lorsque, d'une part, l'origine M des trièdres $Mx'y'z'$ subit un déplacement infiniment petit, dont les projections δx, δy, δz sur les axes Ox, Oy, Oz sont :

$$(9)\quad \begin{cases} \delta x = (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t, \\ \delta y = (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t, \\ \delta z = (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t, \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 sont six constantes arbitraires et δt une quantité infiniment petite indépendante de s_0, et lorsque, d'autre part, ce trièdre $Mx'y'z'$ subit une rotation infiniment petite, dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont :

$$\omega_1\delta t, \qquad \omega_2\delta t, \qquad \omega_3\delta t.$$

Observons que, dans le cas présent, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, δp, δq, δr des six expressions ξ, η, ζ, p, q, r sont nulles, comme cela résulte de la théorie bien connue du trièdre mobile, et comme nous pouvons d'ailleurs le vérifier immédiatement au moyen des formules (7) et (8), en y remplaçant $\delta' x$, δ_1' par leurs valeurs actuelles :

$$(9')\quad \begin{cases} \delta' x = \alpha(a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t + \alpha'(a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t + \alpha''(a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t \\ \delta_1' = (\alpha\omega_1 + \alpha'\omega_2 + \alpha''\omega_3)\,\delta t, \end{cases}$$

et $\delta' y$, $\delta' z$, δ_2', δ_3' par leurs valeurs actuelles analogues. Il en résulte que nous obtenons une solution de la question, en prenant pour W une fonction arbitraire de s_0 et des six expressions ξ, η, ζ, p, q, r ; nous allons maintenant montrer que nous obtenons ainsi la solution générale (1) du problème que nous nous sommes posé.

Observons à cet effet que les relations (2) permettent, au moyen de formules bien connues, d'exprimer les dérivées premières des neuf cosinus α, α', ... γ'' par rapport à s_0, au moyen de ces cosinus et de p, q, r. Remarquons d'autre part que les formules (1) permettent de concevoir qu'on exprime les neuf cosinus α, α', ... γ'' au moyen de ξ, η, ζ et des dérivées premières de x, y, z par rapport à s_0. Nous pouvons donc finalement exprimer la fonction W que nous cherchons en fonction de s_0, de x, y, z et de leurs dérivées premières, et enfin de ξ, η, ζ, p, q, r, ce que nous indiquerons en écrivant :

$$W = W\left(s_0, x, y, z, \frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}, \xi, \eta, \zeta, p, q, r\right).$$

Les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, δp, δq, δr étant nulles dans le cas présent, ainsi qu'on l'a remarqué il y a un instant, nous avons finalement à écrire, pour la nouvelle forme de W, que l'on a, en vertu des formules (9), et quels que soient a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 :

$$\frac{\partial W}{\partial x}\delta x + \frac{\partial W}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W}{\partial z}\delta z + \frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}}\delta\frac{dx}{ds_0} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}}\delta\frac{dy}{ds_0} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}}\delta\frac{dz}{ds_0} = 0.$$

Remplaçons δx, δy, δz par leurs valeurs (9) et $\delta\frac{dx}{ds_0}$, $\delta\frac{dy}{ds_0}$, $\delta\frac{dz}{ds_0}$ par les valeurs qu'on en déduit en différentiant ; égalons à zéro les coefficients de a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 ; il nous vient les six conditions suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}}\frac{dz}{ds_0} - \frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}}\frac{dy}{ds_0} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}}\frac{dx}{ds_0} - \frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}}\frac{dz}{ds_0} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}}\frac{dy}{ds_0} - \frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}}\frac{dx}{ds_0} = 0.$$

(1) Nous supposons, dans ce qui va suivre, que la ligne déformable *est susceptible de toutes les déformations possibles*, que, par suite, *l'état déformé peut être pris absolument arbitraire* ; c'est ce que l'on peut exprimer en disant que la ligne déformable est *libre*.

Les trois premières nous montrent, ce que l'on pouvait prévoir facilement, que W est indépendant de x, y, z ; les trois dernières expriment que W ne dépend de $\frac{dx}{ds_0}, \frac{dy}{ds_0}, \frac{dz}{ds_0}$ que par l'intermédiaire de la quantité :

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2,$$

et comme cette dernière, d'après la formule (3), est égale à $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, nous voyons finalement que *la fonction* W *cherchée a la forme remarquable :*

$$W\ (s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r).$$

Si nous multiplions W par ds_0, le produit Wds_0 obtenu est, dans le groupe des déplacements euclidiens, un invariant analogue à celui qui, sous le nom d'*élément linéaire*, provient de la considération de la distance de deux points infiniment voisins de la courbe (M) décrite par le point M.

De même que la valeur commune des intégrales

$$\int_{A_0}^{B_0} \frac{ds}{ds_0}\, ds_0, \qquad \int_A^B ds,$$

prises respectivement entre deux points A_0 et B_0 de la courbe (M_0) et entre leurs points correspondants A et B de la courbe (M), détermine la *longueur* de l'arc AB de cette courbe (M), de même, en associant dans l'esprit la notion d'*action* au passage de l'état naturel (M_0) à l'état déformé (M), nous adjoindrons la fonction W aux éléments de définition de la ligne déformable et nous dirons que l'intégrale :

$$\int_{A_0}^{B_0} W ds_0$$

est l'*action de déformation* sur la ligne déformée entre les points A et B, qui correspondent aux points A_0 et B_0 de (M_0). Nous supposerons, dans cette définition et dans ce qui suit, que les arcs s_0 et s sont comptés dans le sens de A_0 vers B_0 et dans celui de A vers B, ou inversement que les notations A_0, B_0, A, B, pour désigner les extrémités de la ligne dans l'état naturel et dans l'état déformé, correspondent à cette convention.

Nous dirons aussi que W est la *densité* de l'action de déformation *en un point* de la ligne déformée, rapportée à l'unité de longueur de la ligne non déformée ; $W\frac{ds_0}{ds}$ sera cette densité d'action en un point, rapportée à l'unité de longueur de la ligne déformée.

9. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort et le moment de déformation, en un point d'une ligne déformée. — Considérons une variation *quelconque* de l'action de déformation entre deux points A et B de la ligne (M), savoir :

$$\delta \int_{A_0}^{B_0} W ds_0 = \int_{A_0}^{B_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial W}{\partial \eta}\delta\eta + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\delta\zeta + \frac{\partial W}{\partial p}\delta p + \frac{\partial W}{\partial q}\delta q + \frac{\partial W}{\partial r}\delta r \right) ds_0.$$

Nous pouvons l'écrire, en vertu des formules (7) et (8) du § 7,

$$\begin{aligned}\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0 = \int_{A_0}^{B_0}\Big[&\frac{\partial W}{\partial \xi}\Big(\eta\delta K' - \zeta\delta J' + \frac{d\delta' x}{ds_0} + q\delta' z - r\delta' y\Big)\\ &+\frac{\partial W}{\partial \eta}\Big(\zeta\delta I' - \xi\delta K' + \frac{d\delta' y}{ds_0} + r\delta' x - p\delta' z\Big)\\ &+\frac{\partial W}{\partial \zeta}\Big(\xi\delta J' - \eta\delta I' + \frac{d\delta' z}{ds_0} + p\delta' y - q\delta' x\Big)\\ &+\frac{\partial W}{\partial p}\Big(\frac{d\delta I'}{ds_0} + q\delta K' - r\delta J'\Big) + \frac{\partial W}{\partial q}\Big(\frac{d\delta J'}{ds_0} + r\delta I' - p\delta K'\Big)\\ &+\frac{\partial W}{\partial r}\Big(\frac{d\delta K'}{ds_0} + p\delta J' - q\delta I'\Big)\Big] ds_0.\end{aligned}$$

Intégrons par parties les six termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport à s_0 ; il vient :

$$\begin{aligned}\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0 = &\Big[\frac{\partial W}{\partial \xi}\delta' x + \frac{\partial W}{\partial \eta}\delta' y + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\delta' z + \frac{\partial W}{\partial p}\delta I' + \frac{\partial W}{\partial q}\delta J' + \frac{\partial W}{\partial r}\delta K'\Big]_{A_0}^{B_0}\\ -\int_{A_0}^{B_0}&\Big[\Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \xi} + q\frac{\partial W}{\partial \zeta} - r\frac{\partial W}{\partial \eta}\Big)\delta' x + \Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \eta} + r\frac{\partial W}{\partial \xi} - p\frac{\partial W}{\partial \zeta}\Big)\delta' y\\ &+\Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + p\frac{\partial W}{\partial \eta} - q\frac{\partial W}{\partial \xi}\Big)\delta' z + \Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial r} - r\frac{\partial W}{\partial q} + \eta\frac{\partial W}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial W}{\partial \eta}\Big)\delta I'\\ &+\Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial p} - p\frac{\partial W}{\partial r} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial W}{\partial \zeta}\Big)\delta J'\\ &+\Big(\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial r} + p\frac{\partial W}{\partial q} - q\frac{\partial W}{\partial p} + \xi\frac{\partial W}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial W}{\partial \xi}\Big)\delta K'\Big] ds_0.\end{aligned}$$

Posons :

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned} F' &= \frac{\partial W}{\partial \xi},\quad G' = \frac{\partial W}{\partial \eta},\quad H' = \frac{\partial W}{\partial \zeta},\quad I' = \frac{\partial W}{\partial p},\quad J' = \frac{\partial W}{\partial q},\quad K' = \frac{\partial W}{\partial r},\\ X_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \xi} + q\frac{\partial W}{\partial \zeta} - r\frac{\partial W}{\partial \eta},\\ Y_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \eta} + r\frac{\partial W}{\partial \xi} - p\frac{\partial W}{\partial \zeta},\\ Z_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + p\frac{\partial W}{\partial \eta} - q\frac{\partial W}{\partial \xi},\\ L_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial r} - r\frac{\partial W}{\partial q} + \eta\frac{\partial W}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial W}{\partial \eta},\\ M_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial p} - p\frac{\partial W}{\partial r} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial W}{\partial \zeta},\\ N_0' &= \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial r} + p\frac{\partial W}{\partial q} - q\frac{\partial W}{\partial p} + \xi\frac{\partial W}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial W}{\partial \xi}.\end{aligned}\right.$$

Nous aurons :

$$\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0 = [F'\delta' x + G'\delta' y + H'\delta' z + I'\delta\imath' + J'\delta\jmath' + K'\delta\kappa']_{A_0}^{B_0}$$
$$- \int_{A_0}^{B_0} (X'_0\delta' x + Y'_0\delta' y + Z'_0\delta' z + L'_0\delta\imath' + M'_0\delta\jmath' + N'_0\delta\kappa')\, ds_0.$$

En ayant d'abord égard à l'intégrale qui figure dans l'expression de $\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0$, nous appellerons *force extérieure et moment extérieur au point* M, *rapportés à l'unité de longueur de la ligne non déformée*, les segments issus de M, dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement X'_0, Y'_0, Z'_0 et L'_0, M'_0, N'_0. En ayant ensuite égard à la partie tout intégrée de $\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0$, nous appellerons *effort extérieur et moment de déformation extérieur au point* B, les segments issus de B et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement les valeurs $-F'_{B_0}$, $-G'_{B_0}$, $-H'_{B_0}$ et $-I'_{B_0}$, $-J'_{B_0}$, $-K'_{B_0}$ que prennent au point B_0 les expressions $-F'$, $-G'$, $-H'$, et $-I'$, $-J'$, $-K'$. Nous appellerons *effort extérieur et moment de déformation extérieur au point* A, les segments analogues formés avec les valeurs F'_{A_0}, G'_{A_0}, H'_{A_0} et I'_{A_0}, J'_{A_0}, K'_{A_0} que prennent au point A_0 les expressions F', G', H' et I', J', K'.

Les points A et B ne se présentent pas ici de la même façon, conformément à la convention qui les distingue et qui a été faite sur le sens dans lequel on compte l'arc s_0.

Supposons que l'on coupe la ligne déformée AB au point M et que l'on sépare, par la pensée, les deux parties AM et MB ; on pourra regarder les deux segments $(-F', -G', -H')$ et $(-I', -J', -K')$ déterminés pour le point M, comme l'effort et le moment de déformation extérieurs de la partie AM au point M, et les deux segments (F', G', H') et (I', J', K') déterminés pour le même point M, comme l'effort et le moment extérieurs de la partie MB au point M. Il en sera de même si, au lieu de considérer AM et MB, on envisage deux portions de la ligne déformable appartenant respectivement à AM et à MB et ayant une extrémité en M. En raison de ces remarques, nous dirons que $-F'$, $-G'$, $-H'$ et $-I'$, $-J$, $-K'$ sont les composantes sur les axes Mx', My', Mz', *de l'effort et du moment de déformation au point* M, *exercés sur* AM *et sur toute portion de* AM *aboutissant en* M, et que F', G', H' et I', J', K' sont les composantes sur les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation au point* M, *exercés sur* MB *et sur toute portion de* MB *aboutissant en* M.

Observons que, si l'on remplace le trièdre $Mx'y'z'$ par un trièdre qui lui est invariablement lié, on est conduit à des conclusions identiques à celles que nous avons indiquées précédemment (1).

(1) *Note sur la dynamique du point et du corps invariable*, Tome I, pages 260 et 269.

10. Relations entre les éléments définis au § précédent; transformations diverses de ces relations. — Les différents éléments introduits dans le § précédent sont liés par les relations suivantes, qui résultent immédiatement de la comparaison des formules qui leur servent de définition :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dF'}{ds_0} + qH' - rG' - X'_0 = 0, & \dfrac{dI'}{ds_0} + qK' - rJ' + \eta H' - \zeta G' - L'_0 = 0 \\ \dfrac{dG'}{ds_0} + rF' - pH' - Y'_0 = 0, & \dfrac{dJ'}{ds_0} + rI' - pK' + \zeta F' - \xi H' - M'_0 = 0 \\ \dfrac{dH'}{ds_0} + pG' - qF' - Z'_0 = 0, & \dfrac{dK'}{ds_0} + pJ' - qI' + \xi G' - \eta F' - N'_0 = 0 \end{cases}$$

On peut se proposer de transformer les relations que nous venons d'écrire, *indépendamment des valeurs calculées au moyen de* W, *des quantités qui y figurent.* Ces relations ont lieu, en effet, entre des segments attachés au point M et auxquels nous avons attribué des noms; au lieu de définir ces segments par leurs projections sur Mx', My', Mz', nous pouvons tout aussi bien les définir par leurs projections sur d'autres axes; ces dernières projections seront liées par des relations, transformées des précédentes.

Les relations transformées s'obtiendront d'ailleurs immédiatement, si l'on remarque que les formules primitives ont une interprétation simple et immédiate par l'adjonction aux axes mobiles des axes qui leur sont menés parallèlement par le point O.

1. Considérons d'abord les axes fixes Ox, Oy, Oz. Désignons par X_0, Y_0, Z_0, et par L_0, M_0, N_0 les projections sur ces axes de la force et du moment extérieurs en un point quelconque M de la ligne déformée, par F, G, H et par I, J, K les projections de l'effort et du moment de déformation dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' étaient F', G', H', et I', J', K'. Les transformées des relations précédentes sont évidemment :

$$\begin{aligned} &\frac{dF}{ds_0} - X_0 = 0, && \frac{dI}{ds_0} + H\frac{dy}{ds_0} - G\frac{dz}{ds_0} - L_0 = 0, \\ &\frac{dG}{ds_0} - Y_0 = 0, && \frac{dJ}{ds_0} + F\frac{dz}{ds_0} - H\frac{dx}{ds_0} - M_0 = 0, \\ &\frac{dH}{ds_0} - Z_0 = 0, && \frac{dK}{ds_0} + G\frac{dx}{ds_0} - F\frac{dy}{ds_0} - N_0 = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons regarder la force X'_0, Y'_0, Z'_0 et le moment L'_0, M'_0, N'_0, ou si l'on veut la force X_0, Y_0, Z_0 et le moment L_0, M_0, N_0, comme distribués d'une manière continue le long de la ligne, et cette force et ce moment seront ici rapportés à l'unité de longueur de la ligne non déformée; pour avoir la force et le moment rapportés à l'unité de longueur de la ligne déformée, il suffit de multiplier X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0 ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 par $\dfrac{ds_0}{ds}$ ds étant l'élément linéaire de la ligne déformée qui correspond à l'élément linéaire ds_0 de la ligne non déformée. Introduisons les projections X, Y, Z L, M, N sur les axes fixes Ox, Oy, Oz de la force et du moment extérieurs

ainsi rapportés à l'unité de longueur de la ligne déformée; il viendra les relations :

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dF}{ds} - X = 0, & \dfrac{dI}{ds} + H\dfrac{dy}{ds} - G\dfrac{dz}{ds} - L = 0, \\ \dfrac{dG}{ds} - Y = 0, & \dfrac{dJ}{ds} + F\dfrac{dz}{ds} - H\dfrac{dx}{ds} - M = 0, \\ \dfrac{dH}{ds} - Z = 0, & \dfrac{dK}{ds} + G\dfrac{dx}{ds} - F\dfrac{dy}{ds} - N = 0, \end{cases}$$

qui sont identiques à celles considérées par plusieurs auteurs et en particulier par Lord Kelvin et Tait [1]; mais ces derniers les obtiennent, en appliquant ce qu'on appelle, dans la Mécanique classique, le principe de solidification, et en partant de la notion *a priori* des forces et des couples, lesquels sont exprimés ensuite *a posteriori* et en vertu d'hypothèses en fonction des déformations; dans ces hypothèses, on n'a envisagé d'ailleurs jusqu'ici que des déformations infiniment petites, tandis qu'actuellement nous nous plaçons dans le cas le plus général.

2. On peut donner aux équations relatives aux axes fixes Ox, Oy, Oz une nouvelle forme. Nous pouvons exprimer les neuf cosinus α, α', ... γ'' au moyen de trois auxiliaires; soient λ_1, λ_2, λ_3 trois telles auxiliaires. Posons :

$$\begin{aligned} \sum \gamma d\beta = -\sum \beta d\gamma &= \varpi'_1 d\lambda_1 + \varpi'_2 d\lambda_2 + \varpi'_3 d\lambda_3, \\ \sum \alpha d\gamma = -\sum \gamma d\alpha &= \chi'_1 d\lambda_1 + \chi'_2 d\lambda_2 + \chi'_3 d\lambda_3, \\ \sum \beta d\alpha = -\sum \alpha d\beta &= \sigma'_1 d\lambda_1 + \sigma'_2 d\lambda_2 + \sigma'_3 d\lambda_3, \end{aligned}$$

Les fonctions ϖ'_i, χ'_i, σ'_i de λ_1, λ_2, λ_3 ainsi définies satisfont aux relations :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varpi'_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi'_i}{\partial \lambda_j} + \chi'_i \sigma'_j - \chi'_j \sigma'_i = 0, \\ &\frac{\partial \chi'_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi'_i}{\partial \lambda_j} + \sigma'_i \varpi'_j - \sigma'_j \varpi'_i = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3) \\ &\frac{\partial \sigma'_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma'_i}{\partial \lambda_j} + \varpi'_i \chi'_j - \varpi'_j \chi'_i = 0, \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} p &= \varpi'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \varpi'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \varpi'_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0}, \\ q &= \chi'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \chi'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \chi'_3 \frac{d\lambda_3}{ds_0}, \\ r &= \sigma'_1 \frac{d\lambda_1}{ds_0} + \sigma'_2 \frac{d\lambda_2}{ds_0} + \sigma' \frac{d\lambda_3}{ds_0}, \end{aligned}$$

Désignons par ϖ_i, χ_i, σ_i les projections, sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, du

[1] Lord Kelvin et Tait. — *Natural Philosophy*, Part. II, § **614**.

segment dont les projections sur les axes Mx', My', Mz', sont ϖ'_i, χ'_i, σ'_i; nous aurons :

$$\alpha' d\alpha'' + \beta' d\beta'' + \gamma' d\gamma'' = -(\alpha'' d\alpha' + \beta'' d\beta' + \gamma'' d\gamma') = \sum \varpi_i d\lambda_i,$$
$$\alpha'' d\alpha + \beta'' d\beta + \gamma'' d\gamma = -(\alpha d\alpha'' + \beta d\beta'' + \gamma d\gamma'') = \sum \chi_i d\lambda_i,$$
$$\alpha d\alpha' + \beta d\beta' + \gamma d\gamma' = -(\alpha' d\alpha + \beta' d\beta + \gamma' d\gamma) = \sum \sigma_i d\lambda_i,$$

en vertu desquelles (1), les nouvelles fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i de λ_1, λ_2, λ_3 satisfont aux relations :

$$\frac{\partial \varpi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i}{\partial \lambda_j} = \chi_i \sigma_j - \chi_j \sigma_i$$
$$\frac{\partial \chi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i}{\partial \lambda_j} = \sigma_i \varpi_j - \sigma_j \varpi_i \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$
$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} = \varpi_i \chi_j - \varpi_j \chi_i ;$$

nous ferons encore la remarque, qui nous servira plus loin, que si l'on désigne par $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ les variations de λ_1, λ_2, λ_3 qui correspondent aux variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ de α, α', ... γ'', on aura :

$$\delta \mathrm{I}' = \varpi'_1 \delta\lambda_1 + \varpi'_2 \delta\lambda_2 + \varpi'_3 \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{J}' = \chi'_1 \delta\lambda_1 + \chi'_2 \delta\lambda_2 + \chi'_3 \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{K}' = \sigma'_1 \delta\lambda_1 + \sigma'_2 \delta\lambda_2 + \sigma' \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{I} = \alpha \delta \mathrm{I}' + \beta \delta \mathrm{J}' + \gamma \delta \mathrm{K}' = \varpi_1 \delta\lambda_1 + \varpi_2 \delta\lambda_2 + \varpi_3 \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{J} = \alpha' \delta \mathrm{I}' + \beta' \delta \mathrm{J}' + \gamma' \delta \mathrm{K}' = \chi_1 \delta\lambda_1 + \chi_2 \delta\lambda_2 + \chi_3 \delta\lambda_3$$
$$\delta \mathrm{K} = \alpha'' \delta \mathrm{I}' + \beta'' \delta \mathrm{J}' + \gamma'' \delta \mathrm{K}' = \sigma_1 \delta\lambda_1 + \sigma_2 \delta\lambda_2 + \sigma_3 \delta\lambda_3$$

où $\delta \mathrm{I}$, $\delta \mathrm{J}$, $\delta \mathrm{K}$ sont les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My' Mz' sont $\delta \mathrm{I}'$, $\delta \mathrm{J}'$, $\delta \mathrm{K}'$.

Posons maintenant

$$\mathfrak{I} = \varpi'_1 \mathrm{I}' + \chi'_1 \mathrm{J}' + \sigma'_1 \mathrm{K}' = \varpi_1 \mathrm{I} + \chi_1 \mathrm{J} + \sigma_1 \mathrm{K}$$
$$\mathfrak{J} = \varpi'_2 \mathrm{I}' + \chi'_2 \mathrm{J}' + \sigma'_2 \mathrm{K}' = \varpi_2 \mathrm{I} + \chi_2 \mathrm{J} + \sigma_2 \mathrm{K}$$
$$\mathfrak{K} = \varpi'_3 \mathrm{I}' + \chi'_3 \mathrm{J}' + \sigma'_3 \mathrm{K}' = \varpi_3 \mathrm{I} + \chi_3 \mathrm{J} + \sigma_3 \mathrm{K}$$
$$\mathfrak{L}_0 = \varpi'_1 \mathrm{L}'_0 + \chi'_1 \mathrm{M}'_0 + \sigma_3 \mathrm{N}'_0 = \varpi_1 \mathrm{L}_0 + \chi_1 \mathrm{M}_0 + \sigma_1 \mathrm{N}_0$$
$$\mathfrak{M}_0 = \varpi'_2 \mathrm{L}'_0 + \chi'_2 \mathrm{M}'_0 + \sigma'_2 \mathrm{N}'_0 = \varpi_2 \mathrm{L}_0 + \chi_2 \mathrm{M}_0 + \sigma_2 \mathrm{N}_0$$
$$\mathfrak{N}_0 = \varpi'_3 \mathrm{L}'_0 + \chi'_3 \mathrm{M}'_0 + \sigma'_3 \mathrm{N}'_0 = \varpi_3 \mathrm{L}_0 + \chi_3 \mathrm{M}_0 + \sigma_3 \mathrm{N}_0,$$

(1) Ces formules peuvent servir de définition directe aux fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i et être substituées à

$$\varpi_i = \alpha \varpi'_i + \beta \chi'_i + \gamma \sigma'_i,$$
$$\chi_i = \alpha' \varpi'_i + \beta' \chi'_i + \gamma' \sigma'_i, \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$\sigma_i = \alpha'' \varpi'_i + \beta'' \chi'_i + \gamma'' \sigma'_i.$$

et nous aurons l'équation ;

$$\frac{d\mathfrak{J}}{ds_0} - \mathrm{I}'\left(\frac{d\varpi_1'}{ds_0} + q\sigma_1' - r\chi_1'\right) - \mathrm{J}'\left(\frac{d\chi_1'}{ds_0} + r\varpi_1' - p\sigma_1'\right) - \mathrm{K}'\left(\frac{d\sigma_1'}{ds_0} + p\chi_1' - q\varpi_1\right) + \mathrm{F}'(\chi_1'\zeta - \sigma_1'\eta) + \mathrm{G}'(\sigma_1'\xi - \varpi_1'\zeta) + \mathrm{H}'(\varpi_1'\eta - \chi_1'\xi) - \mathfrak{L}_0 = 0,$$

avec deux équations analogues. Si l'on remarque que les fonctions ξ, η, ζ, p, q, r de λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$ donnent lieu aux formules :

$$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda_i} + \chi_i'\zeta - \sigma_i'\eta = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial\lambda_i} = \frac{d\varpi_i'}{ds_0} + q\sigma_i' - r\chi_i'$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda_i} + \sigma_i'\xi - \varpi'\zeta = 0, \qquad \frac{\partial q}{\partial\lambda_i} = \frac{d\chi_i'}{ds_0} + r\varpi_i' - p\sigma_i'$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_i} + \varpi_i'\eta - \chi_i'\xi = 0, \qquad \frac{\partial r}{\partial\lambda_i} = \frac{d\sigma_i'}{ds_0} + p\chi_i' - q\varpi_i',$$

qui résultent des relations de définition des fonctions ϖ_i', χ_i', σ_i' et des neuf identités qu'elles vérifient, on peut donner à l'équation précédente cette nouvelle forme :

$$\frac{d\mathfrak{J}}{ds_0} - \mathrm{F}'\frac{\partial\xi}{\partial\lambda_1} - \mathrm{G}'\frac{\partial\eta}{\partial\lambda_1} - \mathrm{H}'\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_1} - \mathrm{I}'\frac{\partial p}{\partial\lambda_1} - \mathrm{J}'\frac{\partial q}{\partial\lambda_1} - \mathrm{K}'\frac{\partial r}{\partial\lambda_1} - \mathfrak{L}_0 = 0,$$

avec deux équations analogues.

En posant

$$\mathfrak{J}' = \varpi_1'(\mathrm{I}' + y'\mathrm{H}' - z'\mathrm{G}') + \chi_1'(\mathrm{J}' + z'\mathrm{F}' - x'\mathrm{H}') + \sigma_1'(\mathrm{K}' + x'\mathrm{G}' - y'\mathrm{F}'),$$
$$\mathfrak{L}_0' = \varpi_1'(\mathrm{L}_0' + y'\mathrm{Z}_0' - z'\mathrm{Y}_0') + \chi_1'(\mathrm{M}_0' + z'\mathrm{X}_0' - x'\mathrm{Z}_0') + \sigma_1'(\mathrm{N}_0' + x'\mathrm{Y}_0' - y'\mathrm{X}_0'),$$

avec des formules analogues pour $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{N}_0'$, on trouve de même la forme d'équation

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{ds_0} - (\mathrm{I}' + y'\mathrm{H}' - z'\mathrm{G}')\frac{\partial p}{\partial\lambda_1} - (\mathrm{J}' + z'\mathrm{F}' - x'\mathrm{H}')\frac{\partial q}{\partial\lambda_1} - (\mathrm{K}' + x'\mathrm{G}' - y'\mathrm{F}')\frac{\partial r}{\partial\lambda_1} - \mathfrak{L}_0' = 0,$$

avec deux équations analogues.

Nous appliquerons bientôt les transformations que nous venons d'indiquer ; pour le moment, nous nous bornerons à faire remarquer que *les expressions* $\delta\mathrm{I}'$, $\delta\mathrm{J}'$, $\delta\mathrm{K}'$ et $\delta\mathrm{I}$, $\delta\mathrm{J}$, $\delta\mathrm{K}$ *ne sont pas des différentielles exactes.*

3. Au lieu de rapporter aux axes fixes $Oxyz$ les éléments relatifs au point M, envisageons, pour définir ces éléments, un trièdre trirectangle $Mx_1'y_1'z_1'$ mobile avec M et dont l'axe Mx_1' est assujetti à être dirigé suivant la tangente à la courbe (M) menée dans le sens des arcs croissants. Pour définir ce trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$, rapportons-le au trièdre $Mx'y'z'$ et soient, par rapport aux axes de ce dernier, l, l', l'' les cosinus directeurs de Mx_1', m, m', m'' ceux de My_1' et n, n', n'' ceux de Mz_1'. Les cosinus l, l', l'' seront définis par les formules :

$$l = \xi\frac{ds_0}{ds}, \qquad l' = \eta\frac{ds_0}{ds}, \qquad l'' = \zeta\frac{ds_0}{ds},$$

c'est-à-dire par les suivantes :

$$l = \frac{\xi}{\varepsilon}, \qquad l' = \frac{\eta}{\varepsilon}, \qquad l'' = \frac{\zeta}{\varepsilon},$$

en posant

$$\varepsilon = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

nous admettrons que le trièdre $Mx'_1 y'_1 z'_1$ a même disposition que les autres. Nous ne ferons pas d'hypothèse particulière sur les autres cosinus ; ils seront simplement assujettis à vérifier, d'après leur définition, les relations :

$$m\xi + m'\eta + m''\zeta = 0,$$
$$n\xi + n'\eta + n''\zeta = 0.$$

Supposons que s_0 varie et que, pour un instant, on lui fasse jouer le rôle du temps ; rapportons de plus le trièdre $Mx'_1 y'_1 z'_1$ au trièdre fixe $Oxyz$ et désignons alors par p_1, q_1, r_1 les projections respectives de la rotation instantanée du trièdre $Mx'_1 y'_1 z'_1$ sur les axes Mx'_1, My'_1, Mz'_1, en sorte que l'on aura trois formules telles que la suivante :

$$p_1 = lp + l'q + l''r + \sum n \frac{dm}{ds_0},$$

en admettant la même disposition pour les trièdres.

Désignons enfin respectivement par X'_1, Y'_1, Z'_1 et par L'_1, M'_1, N'_1 les projections sur Mx'_1, My'_1, Mz'_1 de la force et du moment extérieurs en un point quelconque M de la ligne déformée, rapportés à l'unité de longueur de la ligne non déformée, par F'_1, G'_1, H'_1 et par I'_1, J'_1, K'_1 les projections de l'effort et du moment de déformation. Les transformées des équations du § précédent sont évidemment :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dF'_1}{ds_0} + q_1 H'_1 - r_1 G'_1 - X'_1 = 0, & \dfrac{dI'_1}{ds_0} + q_1 K'_1 - r_1 J'_1 - L'_1 = 0, \\ \dfrac{dG'_1}{ds_0} + r_1 F'_1 - p_1 H'_1 - Y'_1 = 0, & \dfrac{dJ'_1}{ds_0} + r_1 I'_1 - p_1 K'_1 - \varepsilon H'_1 - M'_1 = 0, \\ \dfrac{dH'_1}{ds_0} + p_1 G'_1 - q_1 F'_1 - Z'_1 = 0, & \dfrac{dK'_1}{ds_0} + p_1 J'_1 - q_1 I'_1 + \varepsilon G'_1 - N'_1 = 0, \end{cases}$$

Dans la Résistance des matériaux, on appelle F_1' *effort de tension* ; les composantes G_1', H_1' sont des *efforts tranchants* dans le plan normal à la ligne déformée. De même la composante I_1' du moment de déformation est un *moment de torsion* ; les composantes J_1', K_1' s'appellent *moments de flexion*.

Si, dans la quatrième équation (13), on a $L'_1 = 0$ et $q_1 = 0$, il vient :

$$\frac{dI'_1}{ds_0} - r_1 J'_1 = 0,$$

d'où résulte cette proposition, établie par Poisson [1] pour le cas où $L'_1 = 0$, $M'_1 = 0$, $N'_1 = 0$, $q_1 = 0$, que *si* $J'_1 = 0$, *on a* $I'_1 = const.$

Poisson. — *Sur les lignes élastiques à double courbure*, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, T. III, n° 3, p. 355-360, janvier 1816. La proposition de Poisson est

11. Travail virtuel extérieur. Théorème de Varignon. Remarques sur les auxiliaires introduites dans le § précédent. — Nous donnerons le nom de *travail extérieur* sur la ligne déformée AB, dans une déformation virtuelle quelconque, à l'expression :

$$\delta\mathcal{T}_e = -\left[F'\delta' x + G'\delta' y + H'\delta' z + I'\delta_I' + J'\delta_J' + K'\delta_K'\right]_{B_0}^{A_0} + \int_{A_0}^{B_0} (X_0'\delta' x + Y_0'\delta' y + Z_0'\delta' z + L_0'\delta_I' + M_0'\delta_J' + N_0'\delta_K')\, ds_0.$$

D'après le § précédent, on peut, en posant $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 \frac{ds_0}{ds}, \ldots, \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}_0' \frac{ds_0}{ds}, \ldots$, donner à cette expression les formes suivantes :

$$\delta\mathcal{T}_e = -\left[F\delta x + G\delta y + H\delta z + I\delta_I + J\delta_J + K\delta_K\right]_A^B + \int_A^B (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + L\delta_I + M\delta_J + N\delta_K)\, ds,$$

$$\delta\mathcal{T}_e = -\left[F\delta x + G\delta y + H\delta z + \mathfrak{J}\delta\lambda_1 + \mathfrak{J}\delta\lambda_2 + \mathfrak{K}\delta\lambda_3\right]_A^B + \int_A^B (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + \mathfrak{L}\delta\lambda_1 + \mathfrak{M}\delta\lambda_2 + \mathfrak{N}\delta\lambda_3)\, ds,$$

$$\delta\mathcal{T}_e = -\left[F'\delta x' + G'\delta y' + H'\delta z' + \mathfrak{J}'\delta\lambda_1 + \mathfrak{J}'\delta\lambda_2 + \mathfrak{K}'\delta\lambda_3\right]_A^B + \int_A^B (X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + \mathfrak{L}'\delta\lambda_1 + \mathfrak{M}'\delta\lambda_2 + \mathfrak{N}'\delta\lambda_3)\, ds.$$

Nous appliquerons plus loin les deux dernières. Des deux premières, nous allons déduire ici une proposition fondamentale de la Statique, dont l'idée, sinon la forme actuelle, est due à Varignon, et que nous avons déjà rencontrée dans l'interprétation donnée par Saint-Guilhem aux relations qui lient, dans la dynamique, les forces extérieures et les quantités de mouvement. Assimilons l'effort et le moment de déformation, en un point M de la ligne M, à la résultante et au moment résultant d'un système de vecteurs relativement au point M ; soient P_ν, P_σ la résultante générale et le moment résultant relatifs à un point P de l'espace. Assimilons de même la force et le moment extérieurs en un point M, rapportés à l'unité de longueur de (M), à la résultante et au moment résultant d'un système de vecteurs relativement au point M ; soient PN et PS la résultante et le moment résultant relatifs à un point P de l'espace ; on a cette proposition :

L'arc s étant assimilé au temps, les vitesses des points géométriques ν *et* σ *sont respectivement égales et parallèles aux segments* PN *et* PS.

indépendante des formules qui définissent l'effort et le moment de déformation au moyen de W ; Poisson l'établissait en écrivant, par le principe de solidification, des équations d'équilibre d'une portion de la ligne ; Bertrand en a donné une démonstration, dans une Note de la *Mécanique analytique* de Lagrange, sur laquelle nous reviendrons.

Cette proposition est évidemment la traduction des équations (12) que l'on peut écrire :

$$(12')\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{ds} - X = 0, & \dfrac{d}{ds}(I + Hy - Gz) - (L + Zy - Yz) = 0, \\ \dfrac{dG}{ds} - Y = 0, & \dfrac{d}{ds}(J + Fz - Hx) - (M + Xz - Zx) = 0, \\ \dfrac{dH}{ds} - Z = 0, & \dfrac{d}{ds}(K + Gx - Fy) - (N + Yx - Xy) = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons encore y arriver de la manière suivante. Partons de

$$\int_A^M \delta W ds_0 = -\delta \mathfrak{T}_e,$$

$\delta\mathfrak{T}_e$ étant pris entre A et M. Comme δW doit être identiquement nul, en vertu de l'invariance de W dans le groupe des déplacements euclidiens, quand les expressions $\delta' x, \ldots, \delta\imath', \ldots$ sont données par les formules (9'), ou, ce qui revient au même, quand δx, δy, δz sont donnés par les formules (9) et quand $\delta' \mathrm{I} = \omega_1 \delta t$, $\delta' \mathrm{J} = \omega_2 \delta t$, $\delta' \mathrm{K} = \omega_3 \delta t$, et cela quelles que soient les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3, nous en concluons que l'on a :

$$[F]_A^M - \int_A^M X ds = 0, \qquad [G]_A^M - \int_A^M Y ds = 0, \qquad [H]_A^M - \int_A^M Z ds = 0,$$

$$[I + yH - zG]_A^M - \int_A^M (L + yZ - zY)\, ds = 0,$$

et deux formules analogues ; *dans ces relations, on peut concevoir* M *comme variable*, et elles sont aussi équivalentes aux équations (12'). On remarquera que ces formules se déduisent facilement de celles que l'on écrit d'ordinaire au moyen du principe de solidification ; nous reviendrons plus loin sur ce point, à propos du raisonnement fait par Poisson et repris par Bertrand, à l'égard de la ligne déformable considérée par Binet.

A côté des expressions F', G', H', I', J', K' d'abord introduites, nous avons envisagé d'autres expressions que l'on peut se proposer de calculer. D'autre part, dans ce calcul, on peut faire apparaître explicitement les fonctions que l'on veut mettre en évidence suivant la nature du problème, qui seront par exemple, x, y, z ou x', y', z' et trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3 au moyen desquels on exprime α, α', ... γ'' (1).

Si l'on introduit x, y, z et λ_1, λ_2, λ_3, on aura :

$$F = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{dx}{ds_0}}, \qquad G = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{dy}{ds_0}}, \qquad H = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{dz}{ds_0}},$$

$$\mathfrak{I} = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\lambda_1}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{J} = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\lambda_2}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{K} = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{d\lambda_3}{ds_0}}.$$

(1) Comme telles auxiliaires λ_1, λ_2, λ_3 on peut prendre, par exemple, les composantes de la rotation qui amène les axes fixes Ox, Oy, Oz à être parallèles respectivement à Mx', My', Mz'.

Si l'on introduit x', y', z' et trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3, on aura :

$$F' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dx'}{ds_0}}, \qquad G' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dy'}{ds_0}}, \qquad H' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dz'}{ds_0}},$$

$$\mathcal{J}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}}, \qquad \mathcal{Y}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}}, \qquad \mathcal{K}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}}.$$

12. Notion de l'énergie de déformation. — Envisageons les deux états (M_0) ou A_0B_0 et (M) ou AB de la ligne déformable, et considérons une suite quelconque d'états partant de (M_0), pour aboutir à (M) ; il suffit, à cet effet, de considérer des fonctions x, y, z ; α, α', ... γ'' de s_0 et d'une variable h qui, pour la valeur zéro de h, se réduisent respectivement à x_0, y_0, z_0 ; α_0, α_0', ... γ_0'', et, pour la valeur h de h, se réduisent respectivement aux valeurs x, y, z ; α, α', ... γ'' relatives à (M).

En faisant varier le paramètre h de o à h d'une façon continue, nous obtenons une déformation continue permettant de passer de l'état A_0B_0 à l'état AB. Envisageons, dans cette déformation continue, *le travail total* effectué par les forces et les moments extérieurs appliqués aux différents éléments de la ligne et par les efforts et les moments de déformation appliqués aux extrémités de la ligne. Il suffit, pour obtenir ce travail total, d'intégrer de o à h la différentielle obtenue, en partant de l'une des expressions de $\delta\mathcal{C}_e$ du § précédent, et en y substituant aux variations de x, y, z ; α, α', ... γ'' les différentielles partielles qui correspondent à l'accroissement dh de h ; la formule

$$\delta\mathcal{C}_e = -\int_{A_0}^{B_0} \delta W ds_0$$

donnant, pour la valeur actuelle de $\delta\mathcal{C}_e$, l'expression $-\int_{A_0}^{B_0} \frac{\partial W}{\partial h} dh ds_0$, nous obtenons, pour le travail total :

$$-\int_0^h \left(\int_{A_0}^{B_0} \frac{\partial W}{\partial h} ds_0 \right) dh =$$

$$-\int_{A_0}^{B_0} [W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r) - W(s_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0)] ds_0.$$

Le travail considéré est indépendant des états intermédiaires et ne dépend que des états extrêmes (M_0) et (M).

Ceci conduit à introduire la notion d'*énergie de déformation*, qui doit être distinguée de celle de l'action envisagée précédemment ; nous dirons que — W est la *densité de l'énergie de déformation*, rapportée à l'unité de longueur de la ligne non déformée.

13. Etat naturel de la ligne déformable. Indications générales sur les problèmes auxquels conduit la considération de cette ligne. — Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un état dit *naturel* de

la ligne déformable, et nous nous sommes donnés un état dit *déformé* ; nous avons indiqué des formules permettant de calculer la force extérieure et les éléments analogues dès que, à la ligne déformable, est adjointe la fonction W représentant l'action de déformation en un point.

Arrêtons-nous un instant sur la notion d'*état naturel*. Ce dernier est, dans ce qui précède, un état qui n'a subi aucune déformation. Concevons que les fonctions $x, y, z, \ldots$ qui déterminent l'état déformé, dépendent d'un paramètre, et que, pour une valeur particulière de ce paramètre, on retrouve l'état naturel ; ce dernier nous apparaît alors comme un cas particulier de l'état déformé, et nous sommes amenés à essayer de lui appliquer les notions relatives à ce dernier.

On peut, sans changer les valeurs des éléments définis par les formules (10), remplacer la fonction W par cette fonction augmentée d'une fonction *déterminée* quelconque de s_0, et si l'on se laisse inspirer par l'idée d'*action*, que nous associons au passage de l'état naturel (M_0) à l'état déformé (M), on pourra, si l'on veut, supposer que la *fonction de* s_0 définie par l'expression

$$W(s_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0)$$

est identiquement nulle ; mais les valeurs obtenues, à l'égard de l'état naturel, pour la force extérieure et pour les éléments analogues, ne seront pas nécessairement nulles ; nous dirons qu'elles définissent la force extérieure et les éléments analogues relatifs à l'état naturel (1).

L'état naturel se présente, dans ce que nous venons de dire, comme l'état initial d'une suite d'états déformés, comme un état à partir duquel nous étudions la déformation ; on est, par suite, conduit à se demander s'il n'est pas possible de faire jouer à un des états déformés, le rôle que nous avons fait jouer à l'état naturel, et cela de façon que les éléments définis au § 9 (force extérieure, effort extérieur, ...), calculés pour les autres états déformés, aient la même valeur, si on rapporte les premiers de ces éléments à l'unité de longueur de la ligne déformée. Cette question ne peut recevoir une réponse que si l'on introduit et si l'on précise la notion d'action correspondant au passage d'un état déformé à un autre état déformé.

L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que cette dernière action s'obtient en retranchant l'action, correspondant au passage de l'état naturel (M_0) au premier état déformé $(M_{(0)})$, de l'action, correspondant au passage de l'état naturel (M_0) au second état déformé (M). Si nous désignons par $s_{(0)}$ l'arc de $(M_{(0)})$ et par $\xi_{(0)}, \eta_{(0)}, \zeta_{(0)}, p_{(0)}, q_{(0)}, r_{(0)}$, les quantités analogues à ξ,

(1) Nous pouvons parler alors de force et de moment extérieurs, d'effort et de moment de déformation, parce que nous regardons l'état naturel comme la limite d'une suite d'états, pour lesquels nous savons ce que c'est que la force et le moment extérieurs, l'effort et le moment de déformation ; la force et le moment extérieurs, l'effort et le moment de déformation n'étant définis par nous, jusqu'ici, que lorsqu'il y a déformation capable de les manifester et de les mesurer.

η, ζ, p, q, r, on est alors conduit à adopter comme action de déformation, relative au passage de l'état $(M_{(0)})$ à l'état (M), l'expression

$$(14)\qquad \int_{A_0}^{B_0} \left[W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r) - W(s_0, \xi_{(0)}, \eta_{(0)}, \zeta_{(0)}, p_{(0)}, q_{(0)}, r_{(0)}) \right] ds_0.$$

Introduisons $s_{(0)}$ comme variable, au lieu de s_0, et désignons par $\xi^{(0)}$, $\eta^{(0)}$, $\zeta^{(0)}$, $p^{(0)}$, $q^{(0)}$, $r^{(0)}$ ce que deviennent ξ, η, ζ, p, q, r, quand on fait jouer à $s_{(0)}$ le rôle que l'on faisait jouer à s_0 ; on aura des relations telles que la suivante :

$$\xi = \xi^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0},$$

et, en désignant par $A_{(0)}$, $B_{(0)}$ les points de $(M_{(0)})$ qui correspondent aux points A_0, B_0 de (M_0), l'expression (14) devient :

$$(15)\qquad \int_{A_{(0)}}^{B_{(0)}} W_0^{(0)}(s_{(0)}, \xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}, r^{(0)})\, ds_{(0)},$$

en désignant par $W_0^{(0)}(s_{(0)}, \xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}, r^{(0)})$ l'expression

$$\left[W\left(s_0, \xi^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0}, \eta^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0}, \ldots, r^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0}\right) - W(s_0, \xi_{(0)}, \eta_{(0)}, \ldots, r_{(0)}) \right] \frac{ds_0}{ds_{(0)}},$$

dans laquelle s_0, $\frac{ds_0}{ds_{(0)}}$, $\frac{ds_{(0)}}{ds_0}$ sont remplacés en fonction de $s_{(0)}$.

On pourra d'ailleurs, si l'on veut, d'après la remarque faite au début de ce §, substituer à l'expression (15) la suivante :

$$(15')\qquad \int_{A_{(0)}}^{B_{(0)}} W^{(0)}(s_{(0)}, \xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}, r^{(0)})\, ds_{(0)}$$

où la fonction $W^{(0)}(s_{(0)}, \xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}, p^{(0)}, q^{(0)}, r^{(0)})$ est l'expression

$$W\left(s_0, \xi^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0}, \ldots, r^{(0)} \frac{ds_{(0)}}{ds_0}\right.$$

dans laquelle s_0, $\frac{ds_{(0)}}{ds_0}$, $\frac{ds_{(0)}}{ds_0}$ sont remplacés en fonction de $s_{(0)}$.

On constate immédiatement que l'application des formules du § 9 à l'expression (15) ou à l'expression (15') donne, en partant de $(M_{(0)})$ comme état naturel, les mêmes valeurs de la force et du moment extérieurs relatifs à l'état (M), rapportés à l'unité de longueur de (M), ainsi que les mêmes valeurs de l'effort et du moment de déformation.

Ainsi, nous pourrons considérer (M) comme un état déformé dont $(M_{(0)})$ serait l'état naturel, pourvu que la fonction W associée à l'état (M) soit actuellement [1] $W_{(0)}$ et $W_0^{(0)}$.

[1] Ceci nous permet, comme nous l'avons dit au début de ce §, de généraliser la notion d'état naturel que nous avions d'abord introduite. Au lieu de faire correspondre simplement à ce mot l'idée d'un état particulier, nous pouvons, d'une façon plus générale, lui faire correspondre l'idée d'un état quelconque à partir duquel nous étudions la déformation.

Donnons maintenant quelques indications générales sur les problèmes auxquels peut conduire la considération de la ligne déformable.

Nous avons donné, dans ce qui précède, ainsi que nous l'avons déjà rappelé, les formules qui déterminent la force extérieure et les éléments analogues, lorsqu'on suppose connues les fonctions x, y, z, ... de s_0, qui définissent l'état déformé.

Nous pouvons maintenant concevoir que l'on cherche à définir, soit en totalité, soit en partie, les fonctions x, y, z, ... connaissant un certain nombre des éléments tels que la force et le moment extérieurs et certaines données accessoires relatives aux inconnues.

Remarquons immédiatement que si l'on part de la donnée de x, y, z, ... et si l'on calcule, pour fixer les idées, X'_0, Y'_0, Z'_0, on obtiendra, tous calculs faits, des fonctions déterminées de s_0 ; mais, en vertu des formules qui définissent x, y, z, ... en fonction de s_0, on peut évidemment exprimer X'_0, Y'_0, Z'_0, au moyen de s_0, de x, y, z, ..., et de leurs dérivées jusqu'à tel ordre que l'on voudra. En envisageant un problème, dans lequel X'_0, Y'_0, Z'_0, par exemple, figurent parmi les données, nous pouvons donc concevoir que ces expressions soient données en fonction de s_0, mais nous pouvons aussi bien supposer qu'elles renferment x, y, z, ... et des dérivées de ces dernières par rapport à s_0.

Considérons un problème, dans lequel figurent, parmi les données, les projections de la force et du moment extérieurs, soit sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, soit sur les axes Mx', My', Mz', et supposons, pour fixer les idées, que ces projections soient des fonctions données de s_0, de x, y, z, α, α', ... γ'' et de leurs dérivées du premier et du second ordres. Supposons, en outre, que la force et le moment extérieurs soient rapportés à l'unité de longueur de (M_0) et que x_0, y_0, z_0 soient des fonctions données de s_0. Il est clair que, dans ces conditions, les formules du § 9, qui servent de définition à X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0 deviennent six équations différentielles entre les inconnues x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, ces trois dernières étant trois auxiliaires, au moyen desquelles on a exprimé les neuf cosinus α, α', ... γ'' ; ces équations différentielles, avec les hypothèses que l'on vient de faire sur la force et le moment extérieurs, ne renferment pas de dérivées d'ordre supérieur à deux.

Pour achever la recherche des inconnues, si le problème posé est déterminé, ou du moins s'il ne comporte pas une indétermination aussi grande que celle qui résulte des seules équations différentielles dont on vient de parler, on aura à tenir compte de données complémentaires ; ces dernières pourront être des conditions aux limites, c'est-à-dire des conditions vérifiées aux extrémités A_0 et B_0 par les inconnues : on pourra se donner, par exemple, en A_0 et en B_0, les valeurs d'un certain nombre des expressions x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 et des expressions telles que F'_0, G'_0, H'_0, I'_0, J'_0, K'_0, relatives à l'effort et au moment de déformation, ou même des fonctions, le plus souvent linéaires, de x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 et de F'_0, G', H'_0, I'_0, J'_0, K'_0.

Nous venons de montrer, par des exemples particuliers, avec des hypothèses particulières, comment, à des problèmes divers, pourront correspondre des

équations différentielles et des conditions complémentaires; mais on peut varier les questions.

Si l'arc s figure explicitement dans les données, on considérera s comme une variable supplémentaire et on adjoindra la relation

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Il arrive souvent que l'on porte surtout l'attention sur la ligne déformée (M), la ligne (M_0) restant, en quelque sorte, au second plan ; si nous supposons que l'expression de W en fonction de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r est donnée et ne nécessite pas, pour sa détermination explicite, la donnée de (M_0), la fonction W sera finalement une fonction de s_0, des dérivées premières de x, y, z, de λ_1, λ_2, λ_3 et des dérivées premières de λ_1, λ_2, λ_3 ; si la force et le moment extérieurs sont donnés aussi explicitement au moyen de s_0, de x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 et de leurs dérivées, il est clair que le problème peut être considéré comme comprenant d'une part la détermination de l'état (M), au moyen d'une variable relative à cet état, s par exemple ou l'une des lettres x, y, z, et d'autre part la détermination de la relation qui lie s_0 et s. Avec les hypothèses que nous venons de faire, s_0 pourra figurer explicitement et figurera en outre [1] par sa différentielle ds_0, ou, si l'on veut, par l'expression $\frac{ds_0}{ds}$, ou par l'expression inverse $\frac{ds}{ds_0}$. Remarquons que la notion du quotient $\frac{ds}{ds_0}$, qui donne la dérivée de s par rapport à s_0, correspond à la dilatation linéaire éprouvée par l'élément de ligne ds_0 issu du point M_0 de (M_0) et qui est devenu l'élément ds issu du point M de (M) correspondant au point M_0. Nous reviendrons sur cette dilatation que Lamé a particulièrement envisagée dans la ligne déformable particulière qu'il a étudiée [2].

Un autre type de problèmes sera développé plus loin, lorsqu'on cherchera à rattacher à la ligne déformable définie jusqu'ici, c'est-à-dire à la *ligne libre* [3], susceptible de toutes les déformations possibles, les lignes très spéciales considérées par les géomètres qui se sont occupés autrefois du sujet actuel, en envisageant l'étude de ces dernières comme l'étude de déformations particulières de la ligne libre.

14. Forme normale des équations de la ligne déformable, lorsque la force et le moment extérieurs sont donnés comme de simples fonctions de s_0 et des éléments qui fixent la position du trièdre $Mx'y'z'$. Principe du travail minimum de Castigliano. — Supposons

(1) Si l'on donne la force et le moment extérieurs rapportés à l'unité de longueur de (M), et, plus généralement, si l'on donne ces éléments en fonction de s_0, s, x, ... et des dérivées premières par rapport à l'une de ces lettres.

(2) Lamé. — *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, p. 98-99 (8e leçon, § **41**, intitulé *Dilatation du fil*).

(3) L'expression *libre* signifie ici que la théorie est faite en partant d'une fonction W portant sur des éléments qui résultent de la considération de cette seule ligne, et qui sont susceptibles de toutes les variations possibles.

que, conformément aux indications du § précédent, la force et le moment extérieurs soient donnés au moyen de simples fonctions de s_0 et des éléments qui fixent la position du trièdre $Mx'y'z'$. Supposons aussi que l'état naturel soit donné. Nous pouvons considérer les équations du § **9**, comme des équations différentielles relatives soit aux inconnues x, y, z et à trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3 au moyen desquels on exprime α, α', ... γ'', soit encore, ce qui correspond à un changement de variables, relatives aux inconnues x', y', z' et aux trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3. Ces deux points de vue sont ceux qui se présentent le plus naturellement. Dans le premier cas, les expressions ξ, η, ζ, p, q, r sont des fonctions de $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$, que l'on calculera au moyen des formules (1) et (3). Dans le second cas, ce seront des fonctions de x', y', z', $\frac{dx'}{ds_0}$, ..., λ_1, ... $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, ..., que l'on calculera au moyen des formules (2) et (4).

Le premier cas est le plus intéressant, en raison de l'analogie qui existe entre la question actuelle et la dynamique du point, du trièdre et du corps invariable. Examinons-le d'abord.

1. Admettons que X_0', Y_0', Z_0', L_0', M_0', N_0', ou, ce qui revient au même, X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0, soient des fonctions données de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3. L'expression W est, après substitution des valeurs de ξ, η, ζ, p, q, r, tirées des formules (1) et (2) une fonction déterminée de s_0, $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$, que nous continuerons à désigner par W, et les équations du problème peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} - X_0 = 0, \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \mathfrak{L}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}} - Y_0 = 0, \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \mathfrak{M}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}} - Z_0 = 0, \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - \mathfrak{N}_0 = 0,$$

$\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ étant les fonctions de s_0 x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, qui résultent des fonctions du § **10**.

Ceci résulte immédiatement, soit des formules des §§ précédents, soit d'une façon plus immédiate de ce que les formules de définition de X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, F, G, H, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$ peuvent se résumer dans la relation :

$$\delta \int_{A_0}^{B_0} W ds_0 + \delta \mathfrak{C}_e = 0,$$

c'est-à-dire dans :

$$\delta\int_{A_0}^{B_0} W ds_0 = [F\delta x + G\delta y + H\,\delta z + \mathfrak{I}\delta\lambda_1 + \mathfrak{J}\delta\lambda_2 + \mathfrak{K}\delta\lambda_3]_{A_0}^{B_0}$$
$$-\int_{A_0}^{B_0}(X_0\delta x + Y_0\delta y + Z_0\delta z + \mathfrak{L}_0\delta\lambda_1 + \mathfrak{M}_0\delta\lambda_2 + \mathfrak{N}_0\delta\lambda_3)ds_0.$$

Nous pouvons remplacer le système précédent, par un système d'équations du premier ordre, en introduisant six inconnues auxiliaires, pour lesquelles, au lieu des dérivées du premier ordre de x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, nous choisirons les six expressions considérées précédemment :

$$F = \frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}}, \qquad G = \frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}}, \qquad H = \frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}},$$
$$\mathfrak{I} = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{J} = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{K} = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}}.$$

De ces six relations, nous pouvons tirer, en supposant que le hessien de W par rapport à $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$ n'est pas nul (ce qui revient à supposer que le hessien de la fonction W, dont on est parti, par rapport à ξ, η, ζ, p, q, r, n'est pas nul), des valeurs pour ces six dernières dérivées $\frac{dx}{ds_0}$, ..., $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$ en fonction de F, G, H, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$. Transportons ces valeurs dans l'expression ;

$$\mathfrak{E} = \frac{dx}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} + \frac{dy}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}} + \frac{dz}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}} + \sum \frac{d\lambda_i}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_i}{ds_0}} - W$$

qui n'est autre que l'expression de :

$$\xi\frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial W}{\partial \eta} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta} + p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial r} - W,$$

en fonction de s_0, $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_1 ..., $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$ ... Nous obtenons, après substitution, une fonction de s_0, λ_1, λ_2, λ_3, F, G, H, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$, que nous continuerons de désigner par la lettre $\mathfrak{E}$. Or la différentielle totale de cette dernière fonction est évidemment :

$$\frac{dx}{ds_0}\,d\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} + \ldots + \frac{d\lambda_1}{ds_0}\,d\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} + \ldots - \frac{\partial W}{\partial s_0}\,ds_0 - \sum \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\,d\lambda_i$$

ou

$$\frac{dx}{ds_0}\,dF + \frac{dy}{ds_0}\,dG + \frac{dz}{ds_0}\,dH + \frac{d\lambda_1}{ds_0}\,d\mathfrak{I} + \frac{d\lambda_2}{ds_0}\,d\mathfrak{J}$$
$$+ \frac{d\lambda_3}{ds_0}\,d\mathfrak{K} - \frac{\partial W}{\partial s_0}\,ds_0 - \sum \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\,d\lambda_i,$$

et l'on a, par suite, comme forme du système définissant x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, F, G, H, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$:

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial F}, \quad \frac{dy}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial G}, \quad \frac{dz}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial H}, \quad \frac{d\lambda_1}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathfrak{I}}, \quad \frac{d\lambda_2}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathfrak{J}}, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mathfrak{K}},$$

$$\frac{dF}{ds_0} - X_0 = 0, \quad \frac{dG}{ds_0} - Y_0 = 0, \quad \frac{dH}{ds_0} - Z_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{I}}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_1} - \mathfrak{L}_0 = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{J}}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_2} - \mathfrak{M}_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{K}}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_3} - \mathfrak{N}_0 = 0.$$

Nous avons supposé que, en vertu des formules qui définissent x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 en fonction de s_0, on exprime X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ en fonction de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 ; ceci est possible d'une infinité de manières, et on peut toujours choisir les nouvelles formes de X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ de façon qu'elles soient respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \lambda_3}$, changées de signe d'une même fonction $\mathcal{U}$, indépendante ou non de s_0. Supposons qu'il en est ainsi et désignons par $\mathcal{V}$ la fonction de x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 (et peut-être de s_0) définie par la formule :

$$\mathcal{V} = \mathcal{E} + \mathcal{U};$$

le système précédent prend la forme :

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial F}, \quad \frac{dy}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial G}, \quad \frac{dz}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial H}, \quad \frac{d\lambda_1}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathfrak{I}}, \quad \frac{d\lambda_2}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathfrak{J}}, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathfrak{K}},$$

$$\frac{dF}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \quad \frac{dG}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \frac{dH}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}, \quad \frac{d\mathfrak{I}}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda_1},$$

$$\frac{d\mathfrak{J}}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{d\mathfrak{K}}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \lambda_3}.$$

Nous avons ici des équations qui se présentent sous la forme des équations d'Hamilton relatives à la dynamique. Si nous supposons, en particulier, les nouvelles formes de X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ choisies, comme cela est toujours possible, de façon que s_0 n'y figure pas et qu'elles soient les dérivées partielles d'une fonction $-\mathcal{U}$ de x, y, z, λ_1 λ_2, λ_3 et si en outre nous supposons que W (s_0, ξ, η, ζ, p, q, r) ne dépend pas (1) de s_0, nous avons plus particulièrement un système d'équations canoniques.

2. Mettons maintenant en évidence les fonctions x', y', z' et supposons encore les fonctions α, α' ... γ'' exprimées au moyen de trois auxiliaires λ_1, λ_2, λ_3. Admettons que X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0 soient des fonctions données de s_0, x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3. L'expression W est, après substitution des valeurs de ξ, η, ζ, p, q, r tirées des formules (2) et (4), une fonction déterminée de s_0, x', y', z', $\frac{dx'}{ds_0}, \frac{dy'}{ds_0}, \frac{dz'}{ds_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}, \frac{d\lambda_2}{ds_0}, \frac{d\lambda_3}{ds_0}$, que nous continuerons à désigner

(1) On pourra, pour exprimer cette hypothèse, dire que, dans ce cas, et par définition, la ligne est *homogène*.

par W, et les équations du problème peuvent s'écrire :

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx'}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial x'} - X'_0 = 0 \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \mathfrak{L}'_0 = 0$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy'}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial y'} - Y'_0 = 0 \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \mathfrak{M}'_0 = 0$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz'}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial z'} - Z'_0 = 0 \qquad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - \mathfrak{N}'_0 = 0$$

$\mathfrak{L}'_0$, $\mathfrak{M}'_0$, $\mathfrak{N}'_0$ étant les fonctions de s_0, x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3 qui résultent du § **10**.

Nous pouvons remplacer le système précédent par un système d'équations du premier ordre, en introduisant six inconnues auxiliaires, pour lesquelles, au lieu des dérivées du premier ordre de x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3, nous choisirons les six expressions envisagées déjà précédemment :

$$F' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dx'}{ds_0}}, \qquad G' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dy'}{ds_0}}, \qquad H' = \frac{\partial W}{\partial \frac{dz'}{ds_0}},$$

$$\mathfrak{J}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{Y}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}}, \qquad \mathfrak{K}' = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}}.$$

De ces six relations, nous pouvons tirer, en supposant que le hessien de W par rapport à $\frac{dx'}{ds_0}$, $\frac{dy'}{ds_0}$, $\frac{dz'}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$ n'est pas nul, des valeurs pour ces six dernières dérivées en fonction de F', G', H', $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{K}'$; transportons ces valeurs dans l'expression :

$$\mathcal{E}' = \frac{dx'}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx'}{ds_0}} + \frac{dy'}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy'}{ds_0}} + \frac{dz'}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz'}{ds_0}} + \sum \frac{d\lambda_i}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_i}{ds_0}} - W,$$

nous obtenons, après substitution, une fonction de s_0, x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3, F', G', H', $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{K}'$, que nous continuerons de désigner par la lettre $\mathcal{E}'$. Or, la différentielle totale de cette dernière fonction est évidemment :

$$\frac{dx'}{ds_0}\,dF' + \frac{dy'}{ds_0}\,dG' + \frac{dz'}{ds_0}\,dH' + \frac{d\lambda_1}{ds_0}\,d\mathfrak{J}' + \frac{d\lambda_2}{ds_0}\,d\mathfrak{Y}' + \frac{d\lambda_3}{ds_0}\,d\mathfrak{K}' - \frac{\partial W}{\partial s_0}\,ds_0$$
$$- \frac{\partial W}{\partial x'}\,dx' - \frac{\partial W}{\partial y'}\,dy' - \frac{\partial W}{\partial z'}\,dz' - \sum \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}\,d\lambda_i,$$

et l'on a, par suite, comme forme du système définissant x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3, F', G', H', $\mathfrak{J}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{K}'$,

$$\frac{dx'}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial F'}, \quad \frac{dy'}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial G'}, \quad \frac{dz'}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial H'}, \quad \frac{d\lambda_1}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \mathfrak{J}'}, \quad \frac{d\lambda_2}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \mathfrak{Y}'}, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \mathfrak{K}'},$$

$$\frac{dF'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial x'} - X'_0 = 0, \quad \frac{dG'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial y'} - Y'_0 = 0, \quad \frac{dH'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial z'} - Z'_0 = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \lambda_1} - \mathfrak{L}'_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{Y}'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \lambda_2} - \mathfrak{M}'_0 = 0, \quad \frac{d\mathfrak{K}'}{ds_0} + \frac{\partial \mathcal{E}'}{\partial \lambda_3} - \mathfrak{N}'_0 = 0.$$

Nous avons supposé que, en vertu des formules qui définissent x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3 en fonction de s_0, on exprime X'_0, Y'_0, Z'_0, $\mathfrak{L}'_0$, $\mathfrak{M}'_0$, $\mathfrak{N}'_0$, en fonction de s_0, x', y', z', λ_1, λ_2, λ_3 ; ceci est possible d'une infinité de manières et on peut toujours choisir les nouvelles formes de X'_0, Y'_0, Z_0, $\mathfrak{L}'_0$, $\mathfrak{M}'_0$, $\mathfrak{N}'_0$ de façon qu'elles soient respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial x'}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial y'}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial z'}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial \lambda_1}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial \lambda_2}$, $\frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial \lambda_3}$ changées de signe d'une même fonction $\mathfrak{U}'$ indépendante ou non de s_0. Supposons qu'il en est ainsi et désignons par $\mathfrak{V}'$ la fonction de x', y', z λ_1, λ_2, λ_3 (et peut-être de s_0) définie par la formule :

$$\mathfrak{V}' = \mathfrak{E}' + \mathfrak{U}',$$

le système précédent prend la forme :

$$\frac{dx'}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial F'}, \quad \frac{dy'}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial G'}, \quad \frac{dz'}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial H'}, \quad \frac{d\lambda_1}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \mathfrak{J}'}, \quad \frac{d\lambda_2}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \mathfrak{J}'}, \quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \mathfrak{K}'},$$

$$\frac{dF'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial x'}, \quad \frac{dG'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial y'}, \quad \frac{dH'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial z'}, \quad \frac{d\mathfrak{J}'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \lambda_1},$$

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \lambda_2}, \quad \frac{d\mathfrak{K}'}{ds_0} = -\frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial \lambda_3}.$$

L'équation :

$$\delta \int W ds_0 + \delta \mathfrak{G}_e = 0$$

dans le cas où les forces et moments extérieurs sont nuls, correspond au *principe du travail minimum* de Castigliano (1), déjà considéré par Vène, Cournot, Menabrea, et d'autres encore.

Considérons les équations sous la forme normale :

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial F}, \ \ldots\ldots, \ \frac{dF}{ds_0} - X_0 = 0, \ \ldots\ldots$$

En intégrant de A_0 à B_0, il vient :

$$x_{B_0} - x_{A_0} = \int_{A_0}^{B_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial F} ds_0, \ \ldots, \ F_{B_0} - F_{A_0} = \int_{A_0}^{B_0} X_0 ds_0, \ \ldots$$

Si on suppose, par exemple, X_0, Y_0, Z_0 nuls, on a $F = const. = F_{B_0} = F_{A_0}$ $G = const.$, $H = const.$; dans les trois formules telles que :

$$x_{B_0} - x_{A_0} = \int_{A_0}^{B_0} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial F} ds_0,$$

(1) Castigliano. — *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Turin, 1879. Voir aussi Müller-Breslau, *Die neueren Methoden der Festigkeitslehre*, 3e éd., Leipzig, 1904.

F, G, H sont indépendants de s_0, et on peut écrire :

$$x_{B_0} - x_{A_0} = \frac{\partial}{\partial F}\int_{A_0}^{B_0} \mathcal{E} ds_0,$$

Si $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{N}_0$ sont nuls et si $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda_3} = 0$, on obtient des théorèmes analogues relatifs à λ_1, λ_2, λ_3. On est ainsi conduit d'une manière très directe et très naturelle à ce qu'on appelle les théorèmes de Castigliano dans la Résistance des matériaux. On envisage alors généralement le cas simple de la déformation infiniment petite; W est une forme quadratique, et il en est de même de $\mathcal{E}$ qui se déduit de W comme forme adjointe.

15. Notions du trièdre caché et du W caché. — Dans l'étude de la ligne déformable, il est naturel de porter l'attention d'une façon particulière sur la courbe dessinée par cette ligne ; ceci revient à envisager à part x, y, z et à considérer α, α', ... γ'' comme de simples auxiliaires ; c'est ce que nous pouvons également exprimer en concevant que l'on ignore l'existence des trièdres qui déterminent la ligne déformable et que l'on ne connaisse que les sommets de ces trièdres. En nous plaçant à ce point de vue, pour envisager les équations différentielles auxquelles on peut être conduit suivant les cas, nous pouvons introduire la notion du *trièdre caché*, et nous sommes conduits à une classification résultant des diverses circonstances qui peuvent se présenter dans l'élimination de α, α', ... γ''.

Une première étude qui se présente est donc celle des réductions qui peuvent se produire dans l'élimination de α, α', ... γ'' ; dans les cas particuliers correspondants, où l'attention est portée d'une manière presque exclusive sur la courbe dessinée par la ligne déformée (M), on pourra même parfois faire abstraction de (M_0), et, par suite, de la déformation permettant de passer de (M_0) à (M) ; c'est à ce dernier point de vue que nous pourrons retrouver la ligne dite flexible et inextensible de la Mécanique rationnelle.

Le trièdre peut être considéré d'une autre façon ; nous pouvons faire sur lui des hypothèses particulières, et de même sur la courbe (M), ce qui revient à envisager des déformées particulières de la ligne déformable libre. Si les relations que nous imposons sont de simples relations entre ξ, η, ζ, p, q, r, comme ce sera le cas dans les applications que nous aurons à étudier, nous pourrons tenir compte de ces relations dans le calcul de W et déduire de W des fonctions plus particulières ; la question intéressante qui se posera sera d'introduire simplement ces formes particulières, et de considérer, en quelque sorte, comme cachée, la fonction W générale qui aura servi de point de départ. Nous aurons ainsi une *théorie qui sera spéciale aux déformées particulières mises en évidence par les relations données entre* ξ, η, ζ, p, q, r.

Nous verrons que l'on peut ainsi, au moyen de la théorie de la ligne déformable libre, rassembler à titre de cas particuliers et comme provenant d'une même origine, les équations qui sont le résultat des problèmes spéciaux que l'on rencontre dans l'exposition habituelle de la Mécanique rationnelle et dans la théorie classique de l'élasticité.

Dans ces dernières, on se place souvent dans des circonstances propres à éviter la considération des déformations ; en réalité, elles ont besoin d'être complétées ; c'est ce que l'on peut faire, dans les applications pratiques, en envisageant la déformation infiniment petite.

Prenons le cas où la force et le moment extérieurs ne renferment tout au plus que les dérivées premières des inconnues x, y, z et λ_1, λ_2, λ_3 ; les dérivées secondes de ces inconnues ne seront introduites dans les équations différentielles que par W ; or les dérivées de x, y, z ne figurent que dans ξ, η, ζ, et celles de λ_1, λ_2, λ_3 ne se présentent que dans p, q, r. On voit donc que si W ne dépend que de ξ, η, ζ, ou ne dépend que de p, q, r, il y aura réduction dans les ordres des dérivées entrant dans le système d'équations différentielles et par suite aussi réduction dans le système obtenu par l'élimination de p, q, r. Nous commencerons par examiner ces deux premiers cas.

16. Cas ou W ne dépend que de s_0, ξ, η, ζ. Comment on retrouve les équations de la théorie de la ligne flexible et extensible de Lagrange. — Supposons que W ne dépende que de s_0, ξ, η, ζ ; alors les équations du § **14**, qui se réduisent aux suivantes :

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} - X_0 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \mathfrak{L}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}} - Y_0 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \mathfrak{M}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}} - Z_0 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \mathfrak{N}_0 = 0,$$

dans lesquelles W ne dépend que de s_0, $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, nous montrent que, si nous prenons le cas simple où X_0 Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont des fonctions données (1) de s_0, x, y, z, $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, les trois équations de droite peuvent être résolues par rapport à λ_1, λ_2, λ_3, et on obtient finalement trois équations différentielles ne renfermant que s_0, x, y, z et leurs dérivées premières et secondes.

Envisageons d'abord le cas particulier où les fonctions données $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont nulles ; il en sera de même pour les valeurs correspondantes des fonctions de l'un quelconque des systèmes (L′, M′, N′), (L_0, M_0, N_0), (L, M, N). Il en résulte que les équations :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 0,$$

(1) Nous supposons que X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne renferment pas de dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, pour simplifier l'exposition et pour indiquer plus commodément ce à quoi nous voulons faire allusion.

reviennent alors à

$$\frac{F}{\frac{dx}{ds}} = \frac{G}{\frac{dy}{ds}} = \frac{H}{\frac{dz}{ds}},$$

et, en désignant par — T la valeur commune de ces rapports, les équations, dans lesquelles il faut porter λ_1, λ_2, λ_3, s'écrivent :

$$\frac{d}{ds_0}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z_0 = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0.$$

L'effort se réduit actuellement à un *effort de tension* T.

Ceci posé, observons que si l'on part de deux positions (M_0) et (M) supposées *données*, et que l'on en déduise, comme aux §§ **9** et **10**, les fonctions $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, il peut arriver, dans le cas où ces trois fonctions sont nulles, que ce résultat se présente accidentellement, c'est-à-dire pour un certain ensemble de déformées particulières ; mais il peut arriver aussi qu'il se présente quelle que soit la déformée (M), que ce soit une conséquence de la nature de (M), c'est-à-dire de la forme de W.

Envisageons ce dernier cas, qui est particulièrement intéressant ; W est alors une simple fonction de s_0 et de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ou, ce qui revient au même (1), de s_0 et de $\frac{ds_0}{ds}$. Les équations $\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ se réduisent à des identités (2) et il reste simplement les équations

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0,$$

où l'on a ;

$$T = -\frac{\partial W}{\partial \mu},$$

si l'on suppose que W est exprimé au moyen de s_0 et de $\mu = \frac{ds_0}{ds} - 1$ (μ représentant la dilatation linéaire au point M).

Supposons que la fonction W étant connue, on nous donne X, Y, Z ou X_0, Y_0, Z_0 en fonction de s_0, s, x, y, z et des dérivées de quatre de ces dernières (3) par rapport à l'une d'elles ; les équations précédentes, jointes à

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

(1) On peut aussi dire que W est fonction de s_0 et de la dilatation linéaire $\mu = \frac{ds}{ds} - 1$ au point M, considérée par Lamé dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, p. 98, 99 de la 2e édition.

(2) Le *trièdre* est complètement caché ; nous pouvons aussi concevoir que nous ayons une ligne *ponctuelle*.

(3) On peut supposer introduites des dérivées d'ordre supérieur au premier.

fournissent quatre équations différentielles définissant quatre des variables s_0, s, x, y, z au moyen de la cinquième.

Si s ne figure pas explicitement, on pourra éliminer ds, au moyen de la relation que l'on vient d'écrire, et il restera trois équations différentielles définissant, en fonction de s_0, les trois inconnues x, y, z.

Si nous envisageons le cas particulier, dans lequel W ne dépend que de μ et où s_0 ne figure pas explicitement, nous nous trouvons en présence des équations proposées par Lagrange (1), pour l'étude de la ligne qu'il qualifie de « fil flexible et en même temps extensible et contractible » ; nous devons faire remarquer que les explications données par Lagrange, dans le second des numéros qu'il consacre à la question (n° 43), doivent être remaniées de la façon suivante : si nous regardons W comme une fonction donnée de μ, il en est alors de même de T (ce qui correspond à l'assertion de Lagrange, qui exprime, avec ses notations, que F est une fonction donnée de $\frac{ds}{d\sigma}$) ; à l'inconnue μ, nous pouvons substituer l'inconnue T, puisque la connaissance de l'une en fonction de s entraîne celle de l'autre, et finalement, on est amené à la recherche des quatre fonctions T, x, y, z de s au moyen des quatre équations précédentes (et de conditions supplémentaires, si le problème est déterminé). On observera en outre que si, comme semble le supposer Lagrange, les expressions données de X, Y, Z ne renferment pas explicitement s, on pourra se borner à la considérations des trois premières équations et des trois variables x, y, z, la différentielle de s étant éliminée au moyen de la quatrième équation.

Dans le premier des numéros que nous venons de citer (n° 43), Lagrange remarque qu'il est conduit aux mêmes équations que pour le fil qu'il avait considéré auparavant, dans son exposition, sous le nom de fil flexible et inextensible, et il revient dans le n° 44 sur la tension. Il nous semble qu'il y a, dans l'exposition de Lagrange, une certaine confusion au sujet de la notion de force (confusion qui, déjà au point de vue de la seule dynamique, est signalée explicitement par J. Bertrand, dans la note qu'il a adjointe au n° 44). Il est clair, en effet, que le point de vue auquel se place Lagrange est celui de la dynamique, et que, dans son exposition, le mot *équilibre* équivaut au mot *repos*. En introduisant au début du n° 44 « la force F avec laquelle chaque élément ds de la courbe du fil tend à se contracter », Lagrange introduit une notion de la force qui n'est plus conforme à la définition posée au début de son ouvrage (page 1), et qui est, non une force cinétique, mais une force que nous pouvons qualifier de *force statique*, mesurée au moyen des déformations.

17. Le fil flexible et inextensible. — Comment, en restant dans le

(1) Lagrange. — *Mécanique analytique*, 1re Partie, Section V, § 11, nos 42-43, 4e édition, p. 156-158. La même question a été reprise par Lamé, dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, 8e Leçon, puis par M. Duhem, dans le Tome II, de son ouvrage, *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, p. 1 et suiv. L'exposition de Lamé, ainsi que le remarquent Todhunter et Pearson, à la page 235 du Tome I de leur *History* etc., est la reproduction de celle donnée par Poisson, aux pages 422 et suiv. de son *Mémoire sur le mouvement des corps élastiques*, paru en 1829 dans le Tome VIII des *Mémoires de l'Institut de France*.

domaine de la partie de la Statique où l'on mesure les forces au moyen des déformations, pouvons-nous concevoir et introduire la notion de *fil flexible et inextensible* ? Pour donner la définition du fil flexible et inextensible, il nous suffit de suivre, *mais en sens inverse*, la marche adoptée habituellement, c'est-à-dire de nous inspirer de ce que l'on appelle souvent le *principe de solidification* (1).

Envisageons d'une façon générale la ligne déformable du § 5, son état naturel (M_0) et son état déformé (M) ; supposons que nous imposions aux déformations de cette ligne, définies comme on l'a fait au § 5, c'est-à-dire par une *correspondance* entre les points de (M_0) et ceux d'une déformée (M), la condition (2) qu'une portion quelconque de (M) ait même longueur que la portion *correspondante*, ce qui revient à dire que l'on assujettit x, y, z à la condition

$$ds = ds_0,$$

en supposant ds et ds_0 de même signe, comme on l'a fait antérieurement. Admettons que l'on veuille définir, pour une telle ligne, les éléments : force extérieure, ... Nous envisagerons une ligne déformable de l'espèce considérée jusqu'ici, et, au lieu de considérer une déformée (M) quelconque de l'état naturel (M_0), nous porterons notre attention sur les déformées (M), pour lesquelles on a $ds = ds_0$. Ces déformées coïncident, quant à la position des points et des trièdres associés, avec les déformées de la ligne inextensible donnée. Nous poserons, comme définition des forces extérieures, ... agissant sur cette dernière, les formules adoptées précédemment à l'égard d'une certaine ligne déformable, et que l'on appliquera pour les positions de cette ligne, qui coïncident avec celles de la ligne inextensible donnée.

Si nous envisageons, en particulier, la ligne flexible et inextensible, nous déduirons la définition des forces extérieures, relatives à cette ligne de celles de la ligne considérée antérieurement et pour laquelle W est une simple fonction de s et de μ, *en considérant les déformations de cette dernière pour lesquelles la fonction* μ *se réduit à zéro*. Conservant les seules lettres s, X, Y, Z (puisque $s = s_0$, $X = X_0$, $Y = Y_0$, $Z = Z_0$), on est conduit au système

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0,$$

dans lequel $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$, et où T représente la fonction de s définie par la formule $T = -\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)_{\mu = 0}$.

Pour obtenir un problème *déterminé*, il ne sera pas nécessaire de supposer que la fonction T est connue ; il suffira d'adjoindre des conditions aux limites convenables.

(1) APPELL. — 1re édition, T. I, n° 132 p. 165 ; dans la 2e édition, T. I, n° 120, p. 161, l'expression *principe de solidification* est omise ; il en est de même dans THOMSON et TAIT, *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part. II, § **564**, p. 110.

(2) Ce que nous allons dire pourra se répéter dans les différentes circonstances analogues, où l'on sera conduit à adjoindre ce que nous appellerons plus loin des *liaisons intérieures* au système que l'on a préalablement étudié.

18. Cas où W ne dépend que de s_0, ξ, η, ζ et où $\mathfrak{L}_0$ $\mathfrak{M}_0$ $\mathfrak{N}_0$ ne sont pas nuls. — Envisageons maintenant le cas général où $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne sont pas tous trois nuls. Les équations

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \mathfrak{L}_0 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \mathfrak{M}_0 = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \mathfrak{N}_0 = 0$$

reviennent, en introduisant les auxiliaires F, G, H, aux relations

$$H\frac{dy}{ds} - C\frac{dz}{ds} - L = 0$$
$$F\frac{dz}{ds} - H\frac{dx}{ds} - M = 0$$
$$G\frac{dx}{ds} - F\frac{dy}{ds} - N = 0,$$

de sorte que, dans le cas actuel, la composante de l'effort tangente à la ligne, que l'on peut appeler l'*effort de tension*, la composante de l'effort normale à la ligne, que l'on peut appeler l'*effort tranchant*, comme il est d'usage dans la résistance des matériaux, et enfin le vecteur (L, M, N) déterminent un trièdre trirectangle.

Introduisons encore, comme auxiliaire, l'effort de tension

$$T = -\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right);$$

nous obtenons

$$-F = T\frac{dx}{ds} + N\frac{dy}{ds} - M\frac{dz}{ds}$$
$$-G = T\frac{dy}{dz} + L\frac{dz}{ds} - N\frac{dx}{ds}$$
$$-H = T\frac{dz}{ds} + M\frac{dx}{ds} - L\frac{dy}{ds}.$$
$$L\frac{dx}{ds} + M\frac{dy}{ds} + N\frac{dz}{ds} = 0.$$

Par suite, si X, Y, Z, L, M, N sont donnés en fonction de s, de x, y, z et de leurs dérivées premières, on tombe sur trois équations telles que la suivante :

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X + \frac{d}{ds}\left(N\frac{dy}{ds} - M\frac{dz}{ds}\right) = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre :

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1, \qquad L\frac{dx}{ds} + M\frac{dy}{ds} + N\frac{dz}{ds} = 0,$$

de sorte que, *pour le dernier problème posé*, nous avons *cinq* équations différentielles renfermant *quatre* inconnues, savoir x, y, z et l'inconnue auxiliaire T.

19. Cas où W ne dépend que de s_0, p, q, r. — Supposons que W ne

dépende que de s_0, p, q, r ; alors les équations du § **14**, qui se réduisent aux suivantes :

$$X_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \mathfrak{L}_0 = 0,$$

$$Y_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \mathfrak{M}_0 = 0,$$

$$Z_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - \mathfrak{N}_0 = 0,$$

dans lesquelles W ne dépend que de s_0, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\frac{d\lambda_3}{ds_0}$, nous montrent que, si nous prenons le cas simple où X_0, Y_0, Z_0 ne renferment pas de dérivées de x, y, z, on pourra tirer x, y, z des équations de gauche et porter leurs valeurs dans les équations de droite, c'est-à-dire dans $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$; si ces trois dernières ne renferment pas de dérivées de x, y, z d'ordre supérieur au premier, on tombera, quand X_0, Y_0, Z_0 ne renferment que s_0, x, y, z, λ_i, $\frac{d\lambda_i}{ds_0}$ et $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ que s_0, x, y z, $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$, λ_i, $\frac{d\lambda_i}{ds_0}$, $\frac{d^2\lambda_i}{ds_0^2}$, sur trois équations du second ordre pour déterminer λ_1, λ_2, λ_3.

Le cas particulier, dans lequel les fonctions données X_0, Y_0, Z_0 sont identiquement nulles est particulièrement intéressant ; on a simplement les trois équations de droite qui, si $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne dépendent que de λ_1, λ_2, λ_3 et de leurs dérivées, constituent trois équations différentielles déterminant λ_1, λ_2, λ_3.

20. Cas où W est une fonction de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r, dépendant de ξ, η, ζ seulement par l'intermédiaire de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ou, ce qui revient au même, par l'intermédiaire de $\mu = \frac{ds}{ds_0} - 1$. — Considérons l'effort en un point de la ligne déformée et supposons que, pour *toutes les déformées*, il se réduise à un effort de tension ; ceci revient à dire que la fonction W de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r vérifie les identités :

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \xi}}{\xi} = \frac{\frac{\partial W}{\partial \eta}}{\eta} = \frac{\frac{\partial W}{\partial \zeta}}{\zeta},$$

c'est-à-dire qu'elle ne dépend de ξ, η, ζ que par l'intermédiaire de la quantité $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ou ce qui revient au même, de $\mu = \frac{ds}{ds_0} - 1$.

Nous aurons encore actuellement

$$\frac{F}{\frac{dx}{ds}} = \frac{G}{\frac{dy}{ds}} = \frac{H}{\frac{dz}{ds}},$$

et, en introduisant la valeur commune — T de ces rapports, définie par la formule :

$$T = -\frac{\partial W}{\partial \mu},$$

nous pouvons donner au système la forme suivante :

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \qquad (1+\mu)\frac{d}{ds}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} - \mathcal{L}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \qquad (1+\mu)\frac{d}{ds}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} - \mathcal{M}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0, \qquad (1+\mu)\frac{d}{ds}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} - \mathcal{N}_0 = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

par laquelle sont définis x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, et s_0 (μ désignant $\frac{1}{\frac{ds_0}{ds}} - 1$) en fonction de s.

Si nous envisageons le cas dans lequel X, Y, Z sont des fonctions données des seules lettres s, x, y, z, pour fixer les idées, on voit que l'on pourra déterminer séparément x, y, z et l'auxiliaire T, au moyen du système d'équations différentielles

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + X = 0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + Y = 0, \qquad \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + Z = 0,$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Nous retrouvons de nouveau le système qui s'est présenté à propos du fil flexible et extensible de LAGRANGE et à propos du fil flexible inextensible.

21. La ligne déformable obtenue en supposant que Mx' est la tangente en M à (M). — Nous pouvons répéter à l'égard du cas général et de *déformées particulières quelconques*, ce que nous avons dit pour passer du fil flexible extensible de LAGRANGE au fil flexible inextensible de la mécanique rationnelle. Nous allons considérer le cas suivant, qui est important dans la Résistance des matériaux, et qui nous conduira plus loin à la ligne déformable étudiée particulièrement par LORD KELVIN et TAIT, mais seulement, comme nous l'avons déjà observé, au point de vue de la déformation infiniment petite (1).

(1) W. THOMSON et TAIT. — *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part. II, Edition 1883, § **588** et suiv., p. 130 et suiv.

Reportons-nous à la ligne déformable du § 5, et supposons que nous ayons défini la force extérieure, etc., comme au § 9. Concevons maintenant que nous portions uniquement notre attention sur les déformées (M) de (M_0), pour lesquelles l'axe Mx' est tangent à la courbe (M) en chaque point, et supposons aussi, de façon que ces déformées puissent former des suites continues à partir de (M_0), que cette dernière est telle que M_0x_0' est la tangente en M_0. En choisissant convenablement les sens dans lesquels on compte s_0 et s, ceci revient à supposer que l'on a :

$$(14)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = \dfrac{dx_0}{ds_0}, & \alpha_0' = \dfrac{dy_0}{ds_0}, & \alpha_0'' = \dfrac{dz_0}{ds_0}, \\ \alpha = \dfrac{dx}{ds}, & \alpha' = \dfrac{dy}{ds}, & \alpha'' = \dfrac{dz}{ds}, \end{cases}$$

ou que

$$(15)\qquad \eta = \eta_0 = 0, \qquad \zeta = \zeta_0 = 0, \qquad \xi_0 = 1, \qquad \xi = \frac{ds}{ds_0}.$$

L'application des définitions nous donnera, pour la force extérieure, etc., des expressions déterminées ; nous pourrons dire que l'étude de ces expressions et des problèmes auxquels elles peuvent conduire, par la répétition de tout ce qui a été dit, constitue l'objet de l'étude de la ligne assujettie aux conditions définies par les formules (14) et (15).

Le fait de limiter des déformées de (M_0) à celle des déformées (M), qui vérifient les conditions (14) ou (15), ou le fait d'admettre la conception nouvelle d'une ligne qui n'est susceptible que des déformations vérifiant les conditions précédentes, sont regardés ici comme identiques, au point de vue des calculs qui peuvent définir les éléments tels que la force extérieure, etc. Cette manière de voir est absolument conforme au principe dit de *solidification*, qui est introduit par les auteurs dans l'*ordre inverse*, en quelque sorte, de celui que nous suivons.

Avant de considérer la forme que prennent ici les formules du § 9, établissons quelques formules relatives au trièdre $Mx'y'z'$, dans les conditions particulières ou il se présente actuellement. Supposons que nous menions la normale principale Mn et la binormale Mb de la courbe (M) en M ; si elles forment avec Mx' un trièdre $Mx'nb$ de même disposition que le trièdre $Mx'y'z'$, nous pouvons désigner les cosinus directeurs de Mn et de Mb, par rapport aux axes Mx', My', Mz', respectivement par 0, cos ω, sin ω et par 0, — sin ω, cos ω, ce qui revient encore à dire que nous avons :

$$(16)\qquad \begin{cases} \beta = \beta_1 \cos\omega - \gamma_1 \sin\omega, & \gamma = \beta_1 \sin\omega + \gamma_1 \cos\omega, \\ \beta' = \beta_1' \cos\omega - \gamma_1' \sin\omega, & \gamma' = \beta_1' \sin\omega + \gamma_1' \cos\omega, \\ \beta'' = \beta_1'' \cos\omega - \gamma_1'' \sin\omega, & \gamma'' = \beta_1'' \sin\omega + \gamma_1'' \cos\omega, \end{cases}$$

en désignant par β_1, β_1', β_1'', les cosinus directeurs de Mn, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, et par γ_1, γ_1', γ_1'' ceux de Mb, par rapport aux mêmes axes, et en introduisant ainsi une auxiliaire ω, qui est l'angle, compté dans un sens convenable, de My' avec Mn.

Nous pouvons d'ailleurs déterminer ω, au moyen des expressions déjà introduites ; la normale principale étant la tangente à l'indicatrice de P. Serret, considérons, par rapport au trièdre, dont le sommet O est fixe et dont les axes sont parallèles à ceux de $Mx'y'z'$, le point dont les coordonnées sont 1, 0, 0 ; les projections du déplacement de ce point, sur les axes du trièdre mobile ou sur ceux de $Mx'y'z'$, sont :

$$0, \qquad r ds_0, \qquad -q ds_0,$$

et on a :

$$\frac{\cos\omega}{r} = -\frac{\sin\omega}{q}.$$

On peut obtenir des formules plus complètes, en remplaçant, dans les formules (2) du § 6, les cosinus β, β', ... γ'' par leurs expressions (16) ; il vient :

$$p\frac{ds_0}{ds} = \sum\gamma\frac{d\beta}{ds} = \sum\gamma_1\frac{d\beta_1}{ds} - \frac{d\omega}{ds},$$
$$q\frac{ds_0}{ds} = \sum\alpha\frac{d\gamma}{ds} = \cos\omega\sum\alpha\frac{d\gamma_1}{ds} + \sin\omega\sum\alpha\frac{d\beta_1}{ds},$$
$$r\frac{ds_0}{ds} = \sum\beta\frac{d\alpha}{ds} = \cos\omega\sum\beta_1\frac{d\alpha}{ds} - \sin\omega\sum\gamma_1\frac{d\alpha}{ds},$$

c'est-à-dire

$$(17)\qquad \begin{cases} p\dfrac{ds_0}{ds} = \dfrac{1}{\tau} - \dfrac{d\omega}{ds}, \\ q\dfrac{ds_0}{ds} = -\dfrac{\sin\omega}{\rho}, \\ r\dfrac{ds_0}{ds} = \dfrac{\cos\omega}{\rho}, \end{cases}$$

en posant

$$\frac{1}{\rho} = \sum\beta_1\frac{d\alpha}{ds}, \qquad \frac{1}{\tau} = \sum\gamma_1\frac{d\beta_1}{ds},$$

et en se rappelant que $\sum\alpha\frac{d\gamma_1}{ds} = 0$. Les expressions $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\tau}$ sont égales, en valeur absolue, à la courbure et à la torsion (*cambrure* de Barré de Saint-Venant, *tortuosity* de Thomson et Tait) de la courbe (M) en M ; les deux dernières formules (17) correspondent aux remarques faites par Thomson et Tait (1).

Arrivons aux formules du § 9. Désignons, pour un instant, par W_1 ce que devient W, lorsqu'on tient compte des conditions (15), c'est-à-dire posons

$$W_1 = \left[W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)\right]_{\eta=0,\,\zeta=0} = W(s_0, \xi, 0, 0, p, q, r),$$

(1) Thomson et Tait. — *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part. II, § 590, p. 131.

ou encore, en remarquant que, d'après les formules (14),

$$\xi = \frac{ds}{ds_0} = 1 + \mu,$$

posons :

$$W_1 = W(s_0, 1 + \mu, o, o, p, q, r).$$

Nous avons

$$F' = \left[\frac{\partial W}{\partial \xi}\right]_{\eta=o,\,\zeta=o} = \frac{\partial W_1}{\partial \xi} = \frac{\partial W_1}{\partial \mu}, \qquad G' = \left[\frac{\partial W}{\partial \eta}\right]_{\eta=o,\zeta=o},$$

$$H' = \left[\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right]_{\eta=o,\,\zeta=o}, \qquad I' = \left[\frac{\partial W}{\partial p}\right]_{\eta=o,\,\zeta=o} = \frac{\partial W_1}{\partial p},$$

$$J' = \left[\frac{\partial W}{\partial q}\right]_{\eta=o,\,\zeta=o} = \frac{\partial W_1}{\partial q}, \qquad K' = \left[\frac{\partial W}{\partial r}\right]_{\eta=o,\,\zeta=o} = \frac{\partial W_1}{\partial r}.$$

Si donc nous ne voulons introduire que la fonction W_1, c'est-à-dire la valeur que prend W pour $\eta = \zeta = o$, et si nous supposons que l'on ne nous donne pas les valeurs que prennent les dérivées $\frac{\partial W}{\partial \eta}$, $\frac{\partial W}{\partial \zeta}$, pour $\eta = \zeta = o$, nous nous trouvons en présence de six expressions, dont quatre seulement F', I', J', K' peuvent être considérées comme données, et dont deux G', H' seront à déterminer (1). En d'autres termes, la connaissance de W_1 entraîne uniquement celle de l'effort de tension F' et celle du moment de déformation (I', J', K').

Si nous introduisons les expressions F, G, H, I, J, K, nous pouvons dire que les trois premières sont trois auxiliaires à l'égard desquelles on sait simplement que l'on a (2):

$$F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} = \frac{\partial W}{\partial \mu}, \tag{18}$$

et les trois dernières se calculeront au moyen de l'un des systèmes :

$$\begin{cases} \alpha I + \alpha' J + \alpha'' K = \dfrac{\partial W}{\partial p}, \\ \beta I + \beta' J + \beta'' K = \dfrac{\partial W}{\partial q}, \\ \gamma I + \gamma' J + \gamma'' K = \dfrac{\partial W}{\partial r}, \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases} I = \alpha \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta \dfrac{\partial W}{\partial q} + \gamma \dfrac{\partial W}{\partial r}, \\ J = \alpha' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta' \dfrac{\partial W}{\partial q} + \gamma' \dfrac{\partial W}{\partial r}, \\ K = \alpha'' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta'' \dfrac{\partial W}{\partial q} + \gamma'' \dfrac{\partial W}{\partial r}, \end{cases} \tag{19'}$$

$\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots \gamma''$ étant définis par les formules (14) et (16).

(1) En admettant que nous connaissions seulement la fonction W_1, nous pouvons supposer que nous ignorons l'existence de la fonction W, qui nous avait servi de point de départ, que cette fonction est en quelque sorte *cachée, en même temps que les positions du trièdre* $Mx'y'z'$, *pour lesquelles* Mx' *n'est pas tangent à la courbe* (M).

(2) Nous désignons à partir de maintenant par W la fonction W_1 de s_0, μ, p, q, r.

La force et le moment extérieurs en résulteront, dans la mesure où ils peuvent être déterminés lorsque W_1 seul est donné, par les formules des §§ 9 et 10.

Supposons actuellement que l'on donne la force et le moment extérieurs; les équations :

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dF}{ds} - X = 0, & \dfrac{dI}{ds} + H\dfrac{dy}{ds} - G\dfrac{dz}{ds} - L = 0, \\ \dfrac{dG}{ds} - Y = 0, & \dfrac{dJ}{ds} + F\dfrac{dz}{ds} - H\dfrac{dx}{ds} - M = 0, \\ \dfrac{dH}{ds} - Z = 0, & \dfrac{dK}{ds} + G\dfrac{dx}{ds} - F\dfrac{dy}{ds} - N = 0, \end{cases}$$

jointes aux équations (18) et (19) et à la relation :

$$(21)\qquad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

fourniront, lorsque X, Y, Z, L, M, N ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 seront des fonctions données de s_0, s, x, y, z, ω et des dérivées de ces lettres par rapport à l'une d'elles, un système de huit équations différentielles relatives à cinq de ces lettres (en fonction de la sixième) et à F, G, H.

Si s ne figure pas explicitement dans les fonctions données, on pourra se servir de (21) pour éliminer ds et, en prenant s_0, par exemple, comme variable indépendante, on aura un système de sept équations différentielles définissant les sept inconnues x, y, z, ω et F, G, H.

Dans le cas où nous nous plaçons, où la fonction W du point de départ est cachée, les expressions F, G, H, sont de simples auxiliaires définies par les équations différentielles dont nous venons de parler; nous pouvons nous proposer de les éliminer; or cette élimination est facile, puisqu'elles figurent linéairement et à l'exclusion de leurs dérivées dans la relation (18) et dans les trois relations (20) de droite; ces quatre relations donnent :

$$(22)\quad \begin{cases} F = -T\dfrac{dx}{ds} + \left(\dfrac{dK}{ds} - N\right)\dfrac{dy}{ds} - \left(\dfrac{dJ}{ds} - M\right)\dfrac{dz}{ds}, \\ G = -T\dfrac{dy}{ds} + \left(\dfrac{dI}{ds} - L\right)\dfrac{dz}{ds} - \left(\dfrac{dK}{ds} - N\right)\dfrac{dx}{ds}, \\ H = -T\dfrac{dz}{ds} + \left(\dfrac{dJ}{ds} - M\right)\dfrac{dx}{ds} - \left(\dfrac{dI}{ds} - L\right)\dfrac{dy}{ds}, \\ \left(\dfrac{dI}{ds} - L\right)\dfrac{dx}{ds} + \left(\dfrac{dJ}{ds} - M\right)\dfrac{dy}{ds} + \left(\dfrac{dK}{ds} - N\right)\dfrac{dz}{ds} = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$(23)\qquad T = -\frac{\partial W}{\partial \mu},$$

d'où par élimination de F, G, H, le système des quatre équations :

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{ds}\left[-T\dfrac{dx}{ds}+\left(\dfrac{dK}{ds}-N\right)\dfrac{dy}{ds}-\left(\dfrac{dJ}{ds}-M\right)\dfrac{dz}{ds}\right]-X=0, \\ \dfrac{d}{ds}\left[-T\dfrac{dy}{ds}+\left(\dfrac{dI}{ds}-L\right)\dfrac{dz}{ds}-\left(\dfrac{dK}{ds}-N\right)\dfrac{dx}{ds}\right]-Y=0, \\ \dfrac{d}{ds}\left[-T\dfrac{dz}{ds}+\left(\dfrac{dJ}{ds}-M\right)\dfrac{dx}{ds}-\left(\dfrac{dI}{ds}-L\right)\dfrac{dy}{ds}\right]-Z=0, \end{cases}$$

$$(25)\qquad \left(\frac{dI}{ds}-L\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{dJ}{ds}-M\right)\frac{dy}{ds}+\left(\frac{dK}{ds}-N\right)\frac{dz}{ds}=0,$$

dans lesquelles on a à remplacer I, J, K, T par leurs valeurs (19′) et (23), et qui, avec (21), forment un système de cinq équations différentielles reliant cinq des lettres s_0, s, x, y, z, ω à l'une d'elles. Si s ne figure pas explicitement dans les données, on pourra se servir de (21), pour éliminer ds, et les relations (24) et (25) fourniront quatre équations différentielles définissant x, y, z, ω en fonction de s_0.

22. Réduction du système du § précédent à une forme que l'on peut déduire du calcul des variations. — Nous avons trouvé finalement dans le § précédent une fonction W qui, par l'intermédiaire de μ, p, q, r, dépend en outre de s_0, de ω, $\dfrac{d\omega}{ds_0}$, $\dfrac{dx}{ds_0}$, ..., $\dfrac{d^3x}{ds_0^3}$.

Observons que l'équation (25) s'écrit en mettant en évidence ces derniers arguments :

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\dfrac{d\omega}{ds_0}}\right)-\frac{\partial W}{\partial\omega}+\left(L_0\frac{dx}{ds}+M_0\frac{dy}{ds}+N_0\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Examinons si, en combinant successivement chacune des équations (24) avec l'équation (25), on peut obtenir trois équations susceptibles d'être déduites directement du calcul des variations, c'est-à-dire telles que la suivante :

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial\dfrac{d^3x}{ds_0^3}}-\frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial\dfrac{d^2x}{ds_0^2}}+\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial\dfrac{dx}{ds_0}}-X_0+\ldots=0,$$

les termes non écrits ne dépendant que des moments extérieurs.

Si nous remarquons que les équations considérées renferment des dérivées qui sont au plus du cinquième ordre, on voit que l'on doit chercher à introduire les dérivées troisièmes de l'équation (25), laquelle peut s'écrire :

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)+q\frac{\partial W}{\partial r}-r\frac{\partial W}{\partial q}-\left(L_0\frac{dx}{ds}+M_0\frac{dy}{ds}+N_0\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

ou

$$V = \frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right) + q\frac{\partial W}{\partial r} - r\frac{\partial W}{\partial q} - L_0' = 0,$$

avec la notation du § 9.

Considérons la première équation (24) ; elle s'écrit :

$$\frac{d}{ds_0}\left[-T\alpha + \frac{ds_0}{ds}\left(\frac{dK}{ds_0} - N_0\right)\alpha' - \frac{ds_0}{ds}\left(\frac{dJ}{ds_0} - M_0\right)\alpha''\right] - X_0 = 0,$$

c'est-à-dire :

$$U_1 = \frac{d}{ds_0}\left[-T\alpha + \frac{ds_0}{ds}\left(\gamma\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial q} - \beta\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\gamma_1}{\rho}\frac{ds}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial p} - p\beta\frac{\partial W}{\partial q} - p\gamma\frac{\partial W}{\partial r}\right) - \frac{ds_0}{ds}(\alpha' N_0 - \alpha'' M_0)\right] - X_0 = 0.$$

En formant le premier membre $\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3x}{ds_0^3}} + \ldots$, on constate facilement, par un calcul dont nous ne pouvons donner ici les détails, que la combinaison :

$$U_1 + \frac{d^2}{ds_0^2}\left\{\frac{\gamma_1\rho}{\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2}V\right\} + \frac{d}{ds_0}\left\{\frac{\gamma_1\rho\frac{d^2s}{ds_0^2}}{\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^3}V\right\}$$

reproduit les différents termes de l'expression à mettre en évidence, en dehors des éléments qui s'annulent avec les forces extérieures.

Si donc nous posons :

$$\mathfrak{X}_0 = X_0 + \frac{d^2}{ds_0^2}\left\{\frac{\gamma_1\rho}{\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2}L_0'\right\} + \frac{d}{ds_0}\left\{\frac{\gamma_1\rho\frac{d^2s}{ds_0^2}}{\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^3}L_0'\right\} + \frac{d}{ds_0}\left[\frac{ds_0}{ds}(\alpha' N_0 - \alpha'' M_0)\right]$$

et si nous désignons par $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ les expressions analogues obtenues en remplaçant X_0, γ_1 respectivement par Y_0, γ_1', puis par Z_0, γ_1'', et en faisant les permutations sur le dernier terme, nous obtenons la forme suivante du système :

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3x}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2x}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} - \mathfrak{X}_0 = 0,$$

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3y}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2y}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}} - \mathfrak{Y}_0 = 0,$$

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3z}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2z}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}} - \mathfrak{Z}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\omega}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \omega} + \left(L_0\frac{dx}{ds} + M_0\frac{dy}{ds} + N_0\frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

que l'on peut résumer dans la formule :

$$\int_{s_0}^{s_0'} (\delta W + \mathcal{X}_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z - L_0' \delta\omega)\, ds_0 = 0$$

où l'on n'a égard qu'aux termes qui finalement se présentent sous le signe d'intégrale simple (1).

Cette forme résumée, à laquelle on vient de parvenir et qui doit être traitée suivant les règles du calcul des variations, est particulièrement commode pour effectuer les changements de variables.

En supposant les expressions $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{Y}_0$, $\mathcal{Z}_0$, L_0' de forme particulière, on aura les équations des extrémales d'un problème du calcul des variations.

Considérons le cas, dans lequel U désignant une fonction de x, y, z, $\alpha = \frac{1}{\xi}\frac{dx}{ds_0}$, $\alpha' = \frac{1}{\xi}\frac{dy}{ds_0}$, $\alpha'' = \frac{1}{\xi}\frac{dz}{ds_0}$, on a :

$$X_0 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_0 = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_0 = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\xi}\left(M_0 \frac{dz}{ds} - N_0 \frac{dy}{ds}\right) = \frac{\partial U}{\partial \frac{dx}{ds_0}} = \frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\alpha}{\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x'}\frac{dy}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x''}\frac{dz}{ds_0}\right)\right],$$

$$\frac{1}{\xi}\left(N_0 \frac{dx}{ds} - L_0 \frac{dz}{ds}\right) = \frac{\partial U}{\partial \frac{dy}{ds_0}} = \frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial U}{\partial x'} - \frac{\alpha'}{\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x'}\frac{dy}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x''}\frac{dz}{ds_0}\right)\right],$$

$$\frac{1}{\xi}\left(L_0 \frac{dy}{ds} - M_0 \frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial U}{\partial \frac{dz}{ds_0}} = \frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial U}{\partial x''} - \frac{\alpha''}{\xi}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x'}\frac{dy}{ds_0} + \frac{\partial U}{\partial x''}\frac{dz}{ds_0}\right)\right],$$

$$L_0 \frac{dx}{ds_0} + M_0 \frac{dy}{ds_0} + N_0 \frac{dz}{ds_0} = 0$$

ou, ce qui revient au même :

$$X_0 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_0 = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_0 = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$L_0 = \left(\alpha' \frac{\partial U}{\partial x''} - \alpha'' \frac{\partial U}{\partial x'}\right), \quad M_0 = \left(\alpha'' \frac{\partial U}{\partial x} - \alpha \frac{\partial U}{\partial x''}\right), \quad N_0 = \left(\alpha \frac{\partial U}{\partial x'} - \alpha' \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

On a alors :

$$\mathcal{X}_0 = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{ds_0}\frac{\partial U}{\partial \frac{dx}{ds_0}}, \quad \mathcal{Y}_0 = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{ds_0}\frac{\partial U}{\partial \frac{dy}{ds_0}}, \quad \mathcal{Z}_0 = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{ds_0}\frac{\partial U}{\partial \frac{dz}{ds_0}},$$

et les équations des extrémales relatives à l'intégrale :

$$\int (W + U)\, ds_0.$$

(1) On a une forme analogue à celle $\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + U')\, dt = 0$ que donne TISSERAND, pour le principe d'HAMILTON, p. 4 du Tome I de son *Traité de Mécanique céleste*.

Un autre cas particulier, que l'on peut combiner avec le précédent, est celui dans lequel W est de la forme $Bp + \varphi(q^2 + r^2, \xi)$, où B est une constante ; W peut alors s'écrire :

$$Bp + \psi(s_0, \xi, \rho).$$

Si l'on suppose en outre $L_0' = 0$, les quatre équations se réduisent à trois, la quatrième se réduisant à une identité.

Le cas que nous venons de signaler comprend, en particulier, celui où W est de la forme

$$A\frac{1}{\rho^2} + C,$$

A et C étant des constantes, lequel nous ramène à celui considéré par D. Bernoulli, et à sa suite par Euler ; c'est ce cas qui a inspiré Sophie Germain et Poisson, dans leurs recherches sur les surfaces élastiques.

23. La ligne déformable inextensible où Mx' est la tangente en M à (M). — Au lieu de supposer simplement, comme dans le cas précédent, que l'on introduise les conditions (14) et (15), nous pouvons supposer en outre que la ligne est inextensible, ce qui revient à adjoindre, en vertu des (14),

$$\xi = 1.$$

Si nous admettons que l'on connaisse seulement la valeur de la fonction $W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ pour $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, ou encore que, partant de la ligne du § précédent, à laquelle nous adjoignons la condition $\mu = 0$, nous connaissions simplement la valeur de la fonction W_1 pour $\mu = 0$, nous voyons que F, G, H deviennent tous trois des indéterminées, et nous avons actuellement, soit les équations (20), où I, J, K sont à remplacer par les valeurs (19'), dans lesquelles W désigne $W(s_0, 1, 0, 0, p, q, r)$ ou $(W_1)_{\mu=0}$, et qui forment avec la relation (21) un système de sept équations différentielles définissant en fonction de $s = s_0$ les inconnues x, y, z, ω, F, G, H, soit encore les équations (24) et (25), où I, J, K sont à remplacer par les mêmes valeurs (19') et qui forment avec la relation (21) un système de cinq équations différentielles définissant en fonction de $s = s_0$ les inconnues x, y, z, ω, T.

Or le système obtenu coïncide avec celui introduit par Thomson et Tait [1], en supposant que $W(s_0, 1, 0, 0, p, q, r)$ s'obtient, par la substitution des valeurs de p_0, q_0, r_0 en fonction de s_0, dans une forme quadratique (à coefficients constants) par rapport aux expressions $p - p_0$, $q - q_0$, $r - r_0$; c'est ce qui arrivera, par exemple, si on suppose que l'expression W_1 du début du § précédent s'obtient en substituant à p_0, q_0, r_0 leurs valeurs en fonction de s_0 dans une forme quadratique par rapport à $p(1 + \mu) - p_0$, $q(1 + \mu) - q_0$, $r(1 + \mu) - r_0$.

[1] Thomson et Tait. — *Treatise on Natural Philosophy*, Vol. I, Part. II, § **614**, p. 152-155.

Observons en outre que, dans les applications faites par THOMSON et TAIT des considérations de leur § **614**, savoir, par exemple, l'application faite dans le § **616**, ils se placent dans le cas d'une déformation infiniment petite ; nous retrouverons donc tout naturellement les dites applications en partant de la fonction W générale et en considérant la déformation infiniment petite.

Nous pouvons développer ici des considérations analogues à celles relatives à la ligne précédente ; la seule différence est que l'on adjoint

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2 = 1.$$

On parvient actuellement à la formule

$$\int_{s_0}^{s_0'} (\delta W + \mathfrak{X}_0 \delta x + \mathfrak{Y}_0 \delta y + \mathfrak{Z}_0 \delta z - L_0' \delta\omega)\, ds_0 = 0,$$

qui doit avoir lieu *en vertu de*

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2 = 1,$$

et où $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ ont la signification que l'on va indiquer.

Le système des équations d'équilibre est en effet équivalent au suivant :

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3x}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2x}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\left[\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{ds_0}} - T\frac{dx}{ds_0}\right] - \mathfrak{X}_0 = 0,$$

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3y}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0^2}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2y}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\left[\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{ds_0}} - T\frac{dy}{ds_0}\right] - \mathfrak{Y}_0 = 0,$$

$$\frac{d^3}{ds_0^3}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^3z}{ds_0^3}} - \frac{d^2}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d^2z}{ds_0^2}} + \frac{d}{ds_0}\left[\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{ds_0}} - T\frac{dz}{ds_0}\right] - \mathfrak{Z}_0 = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\omega}{ds_0}} - \frac{\partial W}{\partial \omega} + L_0\frac{dx}{ds} + M_0\frac{dy}{ds} + N_0\frac{dz}{ds} = 0.$$

où l'on doit poser

$$\mathfrak{X}_0 = X_0 + \frac{d^2}{ds_0^2}(\gamma_1 \rho L_0') + \frac{d}{ds_0}(\alpha' N_0 - \alpha'' M_0),$$

$$\mathfrak{Y}_0 = Y_0 + \frac{d^2}{ds_0^2}(\gamma'_1 \rho L_0') + \frac{d}{ds_0}(\alpha'' N_0 - \alpha M_0),$$

$$\mathfrak{Z}_0 = Z_0 + \frac{d^2}{ds_0^2}(\gamma''_1 \rho L_0') + \frac{d}{ds_0}(\alpha N_0 - \alpha' M_0).$$

24. Cas où les forces et les moments extérieurs sont nuls ; forme particulière de W conduisant aux équations traitées par Binet et Wantzel. — Au lieu d'employer les équations (24) et (25), il peut être plus

commode de revenir aux équations de départ ; il peut être utile aussi de recourir à l'interprétation géométrique.

Supposons, par exemple, que X_0, Y_0, Z_0 soient nuls ; on en conclut que F, G, H sont des constantes égales aux valeurs F_{A_0}, G_{A_0}, H_{A_0} à l'une des extrémités A_0, et l'on a les trois équations :

$$\frac{dI}{ds_0} + H_{A_0}\frac{dy}{ds_0} - G_{A_0}\frac{dz}{ds_0} - L_0 = 0,$$
$$\frac{dJ}{ds_0} + F_{A_0}\frac{dz}{ds_0} - H_{A_0}\frac{dx}{ds_0} - M_0 = 0,$$
$$\frac{dK}{ds_0} + G_{A_0}\frac{dx}{ds_0} - F_{A_0}\frac{dy}{ds_0} - N_0 = 0,$$

qui sont les équations primitives et qui résultent *actuellement* de l'élimination de T entre (24) et (25).

Si l'on a en outre L_0, M_0, N_0 nuls, c'est-à-dire si la déformée (M) est soumise uniquement à des forces appliquées aux deux extrémités, il vient :

$$I + H_{A_0}y - G_{A_0}z = const.,$$
$$J + F_{A_0}z - H_{A_0}x = const.,$$
$$K + G_{A_0}x - F_{A_0}y = const.,$$

relations que l'on obtient aussi par l'interprétation géométrique des équations, ou, ce qui revient au même, par les formules telles que (1)

$$I_{M_0} + H_{M_0}y_M - G_{M_0}z_M = I_{A_0} + H_{A_0}y_A - G_{A_0}z_A - \int_{A_0}^{M_0}(Y_0 z - Z_0 y - L_0)\,ds_0.$$

Ces remarques faites, considérons le cas où la fonction W de s_0, p, q, r est de la forme (2) :

$$\frac{1}{2}A(q^2 + r^2) + Bp + C,$$

où A, B, C sont des constantes. On aura :

$$I' = B, \qquad J' = Aq, \qquad K' = Ar ;$$

(1) On observera que le raisonnement de BERTRAND (*Sur l'équilibre d'une ligne élastique*, Note III de la *Mécanique analytique* de LAGRANGE, p. 460-464 du Tome XI des Œuvres de LAGRANGE) revient à l'emploi de ces formules, ou plus exactement de leurs équivalentes telles que :

$$I_{M_0} - I_{A_0} = G_{A_0}z_M - H_{A_0}y_M - G_{A_0}z_A + H_{A_0}y_A$$
$$-\left[\int_{A_0}^{M_0}(Y_0 z - Z_0 y - L_0)\,ds_0 + y_M\int_{A_0}^{M_0}Z_0 ds_0 - z_M\int_{A_0}^{M_0}Y_0 ds_0\right];$$

il suffit de se reporter au § 9, où l'on a dit que l'effort et le moment de déformation en A_0 sont $(F'_{A_0}, G'_{A_0}, H'_{A_0})$, $(I'_{A_0}, J'_{A_0}, K'_{A_0})$, c'est-à-dire les valeurs de (F', G', H'), (I', J', K') en A_0.

(2) Si W s'obtient en remplaçant p_0, q_0, r_0 par leurs valeurs dans une fonction de $p - p_0$, $q - q_0$, $r - r_0$, nous supposons que $p_0 = q_0 = r_0 = 0$, en sorte que $(q_0)^2 + (r_0)^2 = 0$ et que la courbe (M_0) est une ligne droite.

le vecteur (I', J', K') ou (I, J, K) est la résultante d'un vecteur constant égal à B, dirigé suivant la tangente Mx', et d'un vecteur, dirigé suivant la binormale, ayant même valeur absolue que $\frac{A}{\rho}$. Les trois équations

$$I+H_{A_0}y-G_{A_0}z=const., \quad J+F_{A_0}z-H_{A_0}x=const., \quad K+G_{A_0}x-F_{A_0}y=const.,$$

sont, aux notations près, identiques aux équations

$$p\frac{dyd^2z-dzd^2y}{ds^3}=\theta\frac{dx}{ds}+cy-bz+a_1,$$
$$p\frac{dzd^2x-dxd^2z}{ds^3}=\theta\frac{dy}{ds}+az-cx+b_1,$$
$$p\frac{dxd^2y-dyd^2x}{ds^3}=\theta\frac{dz}{ds}+bx-ay+c_1,$$

considérées par Binet (1), Wantzel (2), Hermite (3), et où p, θ, a, b, c, a_1, b_1, c_1 sont des constantes.

Dans la note déjà citée, qu'il a placée à la suite de la Mécanique analytique de Lagrange et où il dit avoir imité une méthode exposée par Poisson dans l'article mentionné au § 10 et rappelé au § suivant, J. Bertrand a traité, d'après Wantzel, le cas où les trois équations

$$cy-bz+a_1=0, \qquad az-cx+b_1=0, \qquad bx-ay+c_1=0,$$

représentent une droite; cette droite étant définie par

$$H_A(y-y_A)-G_A(z-z_A)=I_A,$$
$$F_A(z-z_A)-H_A(x-x_A)=J_A,$$
$$G_A(x-x_A)-F_A(y-y_A)=K_A,$$

l'hypothèse précédente revient à

$$F_AI_A+G_AJ_A+H_AK_A=0,$$

et cela se ramène à supposer que le couple (I_A, J_A, K_A) et la force (F_A, G_A, H_A) se réduisent à une force unique.

D'après la relation (2) de la page 463 de Lagrange, cette droite, dont il vient d'être question, ne doit pas rencontrer la courbe (M); cette remarque a été faite, dans le cas où il se place, par J. Bertrand; ce qui peut paraître étrange, c'est que, en haut de la page 462, est conservée précisément une hypothèse qui, d'après la note de la page 463, entraîne la relation $\theta=0$.

(1) J. Binet. — *Mémoire sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure* (Extrait), *C. R.*, **18**, p. 1115-1119, 17 Juin 1844. *Réflexions sur l'intégration des formules de la tige élastique à double courbure*, *C. R.*, **19**, p. 1-3, 1er juillet 1844.

(2) Wantzel. — *Note sur l'intégration des équations de la courbe élastique à double courbure*, *C. R.*, **18**, p. 1197-1201, 24 juin 1844.

(3) Ch. Hermite. — *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, *C. R.*, **90**, p. 478, 8 mars 1880; aussi dans l'ouvrage de même titre paru en 1885 (voir § 35).

En supposant que la constante θ de BINET est nulle, c'est-à-dire, avec nos notations, en faisant B = o, on a la courbe particulière considérée par LAGRANGE.

Observons que, dans le cas actuel, l'inconnue que nous avons désignée par ω n'apparait pas dans les équations ; mais les trois équations :

$$\frac{dI}{ds_0} + H\frac{dy}{ds_0} - G\frac{dz}{ds_0} = o,$$
$$\frac{dJ}{ds_0} + F\frac{dz}{ds_0} - H\frac{dx}{ds_0} = o,$$
$$\frac{dK}{ds_0} + G\frac{dx}{ds_0} - F\frac{dy}{ds_0} = o,$$

se réduisent à deux, car en les multipliant respectivement par $\frac{dx}{ds_0}$, $\frac{dy}{ds_0}$, $\frac{dz}{ds_0}$ et ajoutant, on trouve zéro, eu égard à la forme particulière de I, J, K considérée en dernier lieu.

Nous retrouverons la ligne précédente dans le § suivant ; ceci nous amène à remarquer que l'on peut présenter ce qui précède comme il suit.

Cherchons dans quel cas l'effort de déformation de la ligne du § précédent est perpendiculaire à la normale principale.

Nous avons la condition

$$r\frac{\partial W}{\partial q} - q\frac{\partial W}{\partial r} = o.$$

Si nous supposons que cette condition résulte de la nature de la ligne, c'est-à-dire de la forme de son W, cette condition est une équation aux dérivées partielles vérifiée par W, d'après laquelle W ne doit dépendre de q et de r que par l'intermédiaire de $q^2 + r^2$. Si cette condition est vérifiée, les équations du problème entraînent, d'après la remarque de POISSON rappelée au § **10**, que

$$I' = const.$$

Si nous supposons que cette conclusion résulte de la nature de la ligne, c'est-à-dire de la forme de son W, elle revient à la condition

$$\frac{\partial W}{\partial p} = B,$$

B étant une constante, et nous trouvons

$$W = Bp + \varphi,$$

φ étant une fonction de $q^2 + r^2 = \frac{1}{\rho^2}$; en supposant φ du premier degré par rapport à $q^2 + r^2$, nous retrouvons le W, qui nous a servi de point de départ dans ce paragraphe.

25. La ligne déformable où le plan Mx'y' est le plan osculateur de (M) en M ; cas où la ligne est en outre inextensible ; la ligne considérée par Lagrange et sa généralisation due à Binet et étudiée

par Poisson. — Nous pouvons aller encore plus loin dans les hypothèses sur les déformées d'une ligne déformable; au lieu d'admettre simplement que Mx' est tangent à la courbe (M), nous pouvons supposer que le plan $Mx'y'$ est le plan osculateur de la courbe (M).

1. Laissons d'abord de côté l'hypothèse de l'inextensibilité; admettons que l'on ait encore les relations (14) ou (15) et qu'en outre

$$q = q_0 = 0.$$

Si nous désignons, pour un instant, par W_2 la fonction obtenue en faisant $r_1 = \zeta = q = 0$, dans W, ou $q = 0$ dans W_1, nous aurons

$$F' = \frac{\partial W_2}{\partial \mu}, \qquad I' = \frac{\partial W_2}{\partial p}, \qquad K' = \frac{\partial W_2}{\partial r};$$

quant à G', H', J', ils ne peuvent être calculés si W_2 est seul donné, et devront être considérés comme trois auxiliaires, qui seront à définir par les équations.

Dans le cas actuel, les équations (20) jointes aux relations (18), (21) et aux suivantes :

$$(26) \qquad \begin{cases} I = \alpha \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta J' + \gamma \dfrac{\partial W}{\partial r}, \\ J = \alpha' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta' J' + \gamma' \dfrac{\partial W}{\partial r}, \\ K = \alpha'' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta'' J' + \gamma'' \dfrac{\partial W}{\partial r}, \end{cases}$$

en désignant par W l'expression W_2, fourniront, lorsque X, Y, Z, L, M, N ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 seront des fonctions données de s_0, s, x, y, z et des dérivées de ces lettres par rapport à l'une d'elles, un système de huit équations différentielles relatives à quatre de ces lettres (en fonction de la cinquième) et à F, G, H, J'.

Nous pouvons, comme précédemment, éliminer F, G, H et il reste les quatre équations (24) et (25), dans lesquelles on a à remplacer I, J, K, T par leurs valeurs (26) et (23), et qui, avec (21), forment un système de cinq équations différentielles reliant cinq des lettres s, s_0, x, y, z, J' à l'une d'elles.

2. Introduisons en outre l'inextensibilité par les relations

$$\xi = \xi_0 = 1.$$

Continuons de désigner par W la fonction $W(s_0, 1, 0, 0, p, 0, r)$, et supposons que seule cette fonction soit connue. Nous avons simplement les relations

$$I' = \frac{\partial W}{\partial p}, \qquad K' = \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Par suite, si X, Y, Z, L, M, N ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 sont des fonctions données de s_0, s, x, y, z et des dérivées de ces lettres par rapport à l'une

d'elles, nous avons les sept équations (20) et (21), où I, J, K sont à remplacer par leurs valeurs (26) et qui déterminent, en fonction de s_0 par exemple, les sept inconnues x, y, z, F, G, H, J'. En éliminant F, G, H, nous avons les quatre équations (24) et (25), qui définissent en fonction de s_0 les quatre inconnues x, y, z, J'.

Il est facile de déduire, du cas que nous venons de considérer, ceux envisagés par LAGRANGE, BINET et POISSON.

Supposons que les fonctions données L, M, N soient nulles; les trois équations (20) de droite forment un système équivalent au suivant :

$$\frac{dI'}{ds} - rJ' = 0,$$

$$\frac{dJ'}{ds} + rI' - pK' - H' = 0,$$

$$\frac{dK'}{ds} + pJ' + G' = 0,$$

auquel se réduit celui du § 10 : une ou deux de ces trois équations peuvent même, en général, remplacer une ou deux des équations de droite de (20).

En particulier, la relation

$$\frac{dI'}{ds_0} - rJ' = 0, \tag{27}$$

obtenue en ajoutant les trois équations (20) de droite, après les avoir multipliées par $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\alpha' = \frac{dy}{ds}$, $\alpha'' = \frac{dz}{ds}$, pourra en général être substituée à l'une quelconque des dites équations (20) de droite.

Ceci remarqué, supposons en premier lieu que la fonction W de s_0, p, r, qui figure actuellement dans les relations (26), ne dépende pas de p; nous aurons $I' = 0$, et la relation (27) donnera $J' = 0$ en supposant $r \not\equiv 0$; donc, dans le cas actuel, le moment de déformation est dirigé suivant la binormale de la courbe (M). On a à remplacer, dans les équations (20), I, J, K, par les valeurs :

$$I = \gamma \frac{\partial W}{\partial r}, \qquad J = \gamma' \frac{\partial W}{\partial r}, \qquad K = \gamma'' \frac{\partial W}{\partial r}.$$

Les trois équations de droite (20) se réduisent à deux.

Nous obtenons ainsi le cas envisagé par LAGRANGE dans les nos 46 et suivants du § III, chapitre III, première partie, section V de la *Mécanique analytique* (p. 162 et suiv. du T. I de la dernière édition).

Il n'est peut être pas inutile de montrer l'identité avec l'exposition de LAGRANGE. Nous pouvons poser

$$I = J_1 (dyd^2z - dzd^2y),$$
$$J = J_1 (dzd^2x - dxd^2z),$$
$$K = J_1 (dxd^2y - dyd^2x),$$

puisque le vecteur I, J, K est perpendiculaire au plan osculateur de (M).

Les équations (20) de droite, qui actuellement ($L = M = N = 0$) s'écrivent :

$$\begin{aligned} dyd(J_1d^2z) - dzd(J_1d^2y) &= -Hdy + Gdz, \\ dzd(J_1d^2x) - dxd(J_1d^2z) &= -Fdz + Hdx, \\ dxd(J_1d^2y) - dyd(J_1d^2x) &= -Gdx + Fdy, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{d(J_1d^2x)+F}{dx} = \frac{d(J_1d^2y)+G}{dy} = \frac{d(J_1d^2z)+H}{dz},$$

permettent de poser

$$F = \lambda\frac{dx}{ds} - d(J_1d^2x),$$

$$G = \lambda\frac{dy}{ds} - d(J_1d^2y),$$

$$H = \lambda\frac{dz}{ds} - d(I_1d^2z),$$

en introduisant une auxiliaire λ.

Si nous transportons ces valeurs dans les trois équations (20) de gauche, nous retrouvons les équations données par LAGRANGE, au début de son n° 48 :

$$Xds - d\frac{\lambda dx}{ds} + d^2(J_1d^2x) = 0,$$

$$Yds - d\frac{\lambda dy}{ds} + d^2(J_1d^2y) = 0,$$

$$Zds - d\frac{\lambda dz}{ds} + d^2(J_1d^2z) = 0.$$

Dans la théorie précédente exposée par LAGRANGE, le moment de déformation est normal au plan osculateur ; BINET (1) a proposé de considérer le cas où ce moment de déformation est simplement perpendiculaire à la normale principale ; BINET suppose d'autre part les éléments de la ligne soumis à des forces extérieures, de sorte que nous sommes encore dans le cas où $L = M = N = 0$; l'hypothèse $J' = 0$ faite par BINET entraîne, d'après (27),

$$I' = const.$$

Ce résultat, que nous avons déjà signalé au § **10**, sous la forme générale indépendante de W, et qui est dû à POISSON (2), peut avoir lieu, soit par le fait de la particularisation des forces, soit par le fait de la particularisation du W.

(1) J. BINET. — *Mémoire sur l'expression analytique de l'élasticité et de la raideur des courbes à double courbure* (*Bull. de la Soc. philomatique*, 1814, p. 159-160 ; *Journ. de l'Ec. Polyt.*, 17e Cahier, T. X, p. 418-456, 1815).

(2) POISSON. — *Sur les lignes élastiques à double courbure*, *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, T. III, n° 3, p. 355-360, janvier 1816. Ce travail peut être considéré comme destiné à compléter le précédent dû à BINET.

Si nous nous plaçons dans ce dernier cas, nous avons

$$W = \varphi(s_0, r) + mp,$$

m étant une constante ; par suite

$$I' = m, \qquad K' = \frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Avec cette hypothèse, on voit que si $r \not\equiv 0$, la condition (27) revient à dire que l'inconnue J′ est égale à zéro, et, par suite, on a à remplacer, dans les équations (20), I, J, K par les valeurs

$$I = \alpha m + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$J = \alpha' m + \gamma' \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

$$K = \alpha'' m + \gamma'' \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

et les trois équations (20) de droite se réduisent encore à deux. En particulier, si $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ se déduit d'une expression de la forme $n(r - r_0)$, où n est constant, et si on remplace r_0 en fonction de s_0, on a l'hypothèse faite explicitement par Binet et Poisson. En supposant en outre que la courbe (M_0) est une ligne droite et que les forces extérieures sont nulles, en sorte que le changement de (M_0) en (M) vient uniquement des forces et des moments appliqués aux extrémités, on retrouve le problème traité par Binet et Wantzel, sur lequel nous nous sommes déjà arrêtés précédemment.

En supposant $m = 0$, dans tout ce que nous venons de dire, nous retombons sur le cas de Lagrange.

26. Les déformées rectilignes d'une ligne déformable. — Supposons que (M_0) étant une ligne droite, on porte l'attention sur les déformées (M) qui sont également des lignes droites, qu'en outre l'axe Mx' soit dirigé suivant la droite (M) et $M_0x'_0$ suivant la droite (M_0).

1. Si on suppose d'abord la ligne extensible, nous avons

$$\eta = \eta_0 = 0, \qquad \zeta = \zeta_0 = 0, \qquad q = q_0 = 0, \qquad r = r_0 = 0.$$

En continuant de désigner par W la fonction $W(s_0, 1 + \mu, 0, 0, p, 0, 0)$, nous aurons

$$F' = \frac{\partial W}{\partial \mu}, \qquad I' = \frac{\partial W}{\partial p}.$$

Quant à G′, H′, J′, K′, ils ne peuvent être calculés au moyen de la seule connaissance de la fonction $W(s_0, 1 + \mu, 0, 0, p, 0, 0)$; si donc cette fonction est seule donnée, on devra considérer G′, H′, J′, K′ comme quatre auxiliaires, qui seront à définir par les équations.

Dans le cas actuel, les équations (20) jointes aux relations (18), (21) et aux suivantes :

$$(28)\qquad \begin{cases} I = \alpha \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta J' + \gamma K', \\ J = \alpha' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta' J' + \gamma' K', \\ K = \alpha'' \dfrac{\partial W}{\partial p} + \beta'' J' + \gamma'' K', \end{cases}$$

fourniront, lorsque X, Y, Z, L, M, N ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 seront des fonctions données de s_0, s, x, y, z et des dérivées de ces lettres par rapport à l'une d'elles, un système de huit équations différentielles relatives à quatre de ces lettres (en fonction de la cinquième) et à ω, F, G, H, J', K' : on a en outre deux équations du premier degré (dont les coefficients sont à déterminer) entre x, y, z.

Comme précédemment, on pourra éliminer F, G, H.

Un cas particulier est celui où (M) coïncide avec (M_0), au point de vue ponctuel (coïncidence des sommets des trièdres).

2. Si on introduit en outre l'inextensibilité par les relations :

$$\xi = \xi_0 = 1,$$

et si l'on continue de désigner par W la fonction $W(s_0, 1, 0, 0, p, 0, 0)$, on aura, en supposant connue cette seule dernière fonction, simplement la relation

$$I' = \frac{\partial W}{\partial p}.$$

Si X, Y, Z, L, M, N ou X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 sont des fonctions données de s_0, s, x, y, z et des dérivées de ces lettres par rapport à l'une d'elles, nous avons les sept équations (20) et (21), où I, J, K sont à remplacer par leurs valeurs (28) et qui, adjointes à deux relations du premier degré entre x, y, z (avec des coefficients à déterminer par des conditions accessoires) déterminent en fonction de s_0 les neuf inconnues x, y, z, ω, F, G, H, J', K'.

Comme précédemment, on peut éliminer F, G, H.

27. La ligne déformable obtenue par l'adjonction des conditions $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, et en particulier $p = p_0 = 0$, $q = q_0 = 0$, $r = r_0 = 0$. — Cette ligne déformable peut s'étudier de différentes façons, soit en considérant les déformées (M) de la ligne déformable générale qui vérifient les conditions indiquées, soit en partant du W général et en définissant une nouvelle ligne par la considération des dites conditions, soit en partant d'un W fonction de s_0, ξ, η, ζ et en définissant la ligne conformément à ces conditions.

Envisageons le premier point de vue. Désignons, pour un instant, par W_1 ce que devient W, lorsqu'on tient compte des conditions

$$p = p_0, \qquad q = q_0, \qquad r = r_0,$$

c'est-à-dire posons :

$$W_1 = [W(s_1, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0} = W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p_0, q_0, r_0).$$

Nous avons :

$$F' = \left[\frac{\partial W}{\partial \xi}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0} = \frac{\partial W_1}{\partial \xi}, \qquad I' = \left[\frac{\partial W}{\partial p}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0},$$

$$G' = \left[\frac{\partial W}{\partial \eta}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0} = \frac{\partial W_1}{\partial \eta}, \qquad J' = \left[\frac{\partial W}{\partial q}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0},$$

$$H' = \left[\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0} = \frac{\partial W_1}{\partial \zeta}, \qquad K' = \left[\frac{\partial W}{\partial r}\right]_{p=p_0,\, q=q_0,\, r=r_0}.$$

Si donc *nous ne voulons introduire que la fonction* W_1 de s_0, ξ, η, ζ, c'est-à-dire la valeur que prend W pour $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, et si nous supposons que l'on ne nous donne pas les valeurs que prennent les dérivées $\frac{\partial W}{\partial p}$, $\frac{\partial W}{\partial q}$, $\frac{\partial W}{\partial r}$ pour $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, nous nous trouvons en présence de six expressions, dont trois seulement F', G', H' peuvent être considérées comme données, et dont trois I', J', K' seront à déterminer.

Les équations de la question sont alors :

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \xi}\right) + q_0 \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} - r_0 \frac{\partial W_1}{\partial \eta} - X_0' = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \eta}\right) + r_0 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - p_0 \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} - Y_0' = 0,$$

$$\frac{d}{ds_0}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \zeta}\right) + p_0 \frac{\partial W_1}{\partial \eta} - q_0 \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - Z_0' = 0,$$

$$\frac{dI'}{ds_0} + q_0 K' - r_0 J' + \eta \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial W_1}{\partial \eta} - L_0' = 0,$$

$$\frac{dJ'}{ds_0} + r_0 I' - p_0 K' + \zeta \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W_1}{\partial \zeta} - M_0' = 0,$$

$$\frac{dK'}{ds_0} + p_0 J' - q_0 I' + \xi \frac{\partial W_1}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial W_1}{\partial \xi} - N_0' = 0,$$

auxquelles il faut adjoindre $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, et qui nous donnent en tout neuf équations relatives aux neuf inconnues x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, I', J', K'.

Les trois dernières formules sont à rapprocher de celles relatives à ce que Maxwell a appelé l'induction magnétique à l'intérieur d'un aimant.

Dans le cas particulier $p = p_0 = 0$, $q = q_0 = 0$, $r = r_0 = 0$, les formules précédentes prennent une forme très simple.

28. Ligne déformable soumise à des liaisons. Equations canoniques. — Nous avons considéré, dans tout ce qui précède, une ligne déformable que nous avons qualifiée de *libre*, c'est-à-dire dont la théorie se développe sans faire intervenir d'éléments extérieurs, et au moyen d'une fonction W

constituée avec les éléments de la ligne dans son état naturel et dans l'état déformé.

En portant notre attention sur certaines déformées, nous avons pu, en adjoignant la notion d'un W *caché*, retrouver les équations proposées pour diverses lignes par les auteurs.

Nous pouvons, à côté de cette exposition, en placer une autre, dans laquelle, au lieu de considérer la ligne déformable des §§ **5** à **9**, pour les déformations vérifiant certaines conditions déterminées, nous envisagerons une ligne déformable *sui generis*, dont *la définition tient déjà compte* des conditions déterminées vérifiées par les déformations particulières de la ligne précédente.

Pour définir la nouvelle ligne, en restant dans le même ordre d'idées que précédemment, voici comment nous procéderons.

Observons d'abord que les conditions imposées aux fonctions $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ peuvent être de deux sortes : 1. conditions entre ces fonctions et leurs dérivées (1), quel que soit s_0 ; 2. conditions vérifiées pour certaines valeurs de s_0.

Bornons-nous aux conditions de la première espèce.

Soit, pour fixer les idées,

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$

deux conditions ou *équations de liaison*. Au lieu de constituer en fonction de s_0 les expressions précédemment définies au moyen de l'identité :

$$\int_{A_0}^{B_0} \delta W ds_0 = [F'\delta' x + G'\delta' y + H'\delta' z + I'\delta\imath' + J'\delta\jmath' + K'\delta\kappa']_{A_0}^{B_0} - \int_{A_0}^{B_0} (X'\delta' x + Y'\delta' y + Z'\delta' z + L'\delta\imath' + M'\delta\jmath' + N'\delta\kappa')\, ds_0,$$

où nous introduisons F', G', H', I', J', K' ; X', Y', Z', L', M', N' pour fixer les idées, nous dirons que, par définition, l'identité précédente doit avoir lieu en vertu de

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0,$$

ou encore que, par définition, nous envisageons une ligne déformable dont la théorie résulte de la considération d'une fonction $W(s_0, \xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ et de deux fonctions auxiliaires λ_1, λ_2 de s_0, au moyen de l'identité :

$$\int_{A_0}^{B_0} (\delta W + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2)\, ds_0 = [F'\delta' x + G'\delta' y + H'\delta' y + I'\delta\imath' + J'\delta\jmath' + K'\delta\kappa']_{A_0}^{B_0} - \int_{A_0}^{B_0} (X'\delta' x + Y'\delta' y + Z'\delta' z + L'\delta\imath' + M'\delta\jmath' + N'\delta\kappa')\, ds_0,$$

où cette fois toutes les variations sont arbitraires ; on doit d'ailleurs adjoindre *a posteriori*

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0.$$

(1) Notre exposition ne comporte pas la distinction des liaisons holonomes et des liaisons non holonomes.

Observons encore que, dans le cas où certains des premiers membres $f_1, f_2, \ldots$ des équations de liaison ne renferment que les arguments qui figurent dans W, on pourra concevoir, soit que l'on procède comme nous venons de le dire, soit que, par un changement des auxiliaires, l'on introduise *a priori* dans W la donnée de ces équations de liaison particulières ; ceci nous ramène de nouveau à la notion du W *caché* ; nous nous arrêterons sur ce point, dans les différents cas particuliers qui suivent et auxquels s'applique la remarque actuelle.

1. Ligne flexible et inextensible. — Partons d'une fonction W de $\mu = \frac{ds}{ds_0} - 1$ et de s_0, et adjoignons la condition $\mu = 0$. Nous définissons les fonctions F′, G′, H′, X′, Y′, Z′ en partant de

$$\int_{A_0}^{B_0} (\delta W + \lambda \delta \mu) ds = [F' \delta' x + G' \delta' y + H' \delta' z]_{A_0}^{B_0} - \int_{A_0}^{B_0} (X_0' \delta' x + Y_0' \delta' y + Z_0' \delta' z) ds_0.$$

Ceci revient à remplacer, dans ce qui précède, W par $W_1 = W + \lambda\mu$, et il vient les formules :

$$F = \frac{\partial W_1}{\partial \frac{dx}{ds_0}}, \qquad G = \frac{\partial W_1}{\partial \frac{dy}{ds_0}}, \qquad H = \frac{\partial W_1}{\partial \frac{dz}{ds_0}},$$

$$\frac{dF}{ds_0} - X_0 = 0, \qquad \frac{dG}{ds_0} - Y_0 = 0, \qquad \frac{dH}{ds_0} - Z_0 = 0,$$

dans lesquelles on doit tenir compte de $\mu = 0$ et qui déterminent alors F, G, H, X_0, Y_0, Z_0.

Nous retombons, on le voit, sur la théorie de la ligne flexible et extensible généralisant celle de Lagrange, qui correspond à la fonction W_1 de s_0 et de μ, et dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à $\mu = 0$. Si nous nous plaçons dans le cas du W_1 *caché*, nous supposons alors que l'on connaît simplement la valeur $W_0(s_0)$ que prennent simultanément W et W_1 pour $\mu = 0$, et nous avons alors le système classique de la Mécanique.

Observons que si, pour constituer la ligne flexible et inextensible, nous tenons, par un changement des auxiliaires, compte *a priori* dans W de la condition $\mu = 0$, nous sommes ramenés à remplacer, dans les calculs relatifs à la ligne déformable générale, W par $\lambda\mu$, et nous arrivons à des formules qui conduisent encore à l'étude d'un fil flexible extensible, dont on se borne à considérer les déformations qui correspondent à $\mu = 0$; ces formules, en supposant λ *non connu*, nous ramènent de nouveau au système classique de la Mécanique.

Terminons par la remarque suivante. Supposons que, en vertu des formules qui définissent la déformation, on ait exprimé X_0, Y_0, Z_0 en fonction de s_0, x, y, z, de sorte que $X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz$ soit la différentielle totale d'une fonction φ de s_0, x, y, z, par rapport à x, y, z. Supposons en outre que nous soyons dans le cas du W_1 caché, ou dans le cas envisagé en dernier lieu,

en sorte que nous sommes ramenés au cas de la Mécanique. D'après ce qui précède, on retrouve cette remarque, qui a servi de point de départ à CLEBSCH (1), que les équations de la question dans lesquelles figurent X_0, Y_0, Z_0 ne sont autres que les équations des extrémales du problème du calcul des variations, consistant à déterminer un extremum de l'intégrale

$$\int_{A_0}^{B_0} \varphi ds,$$

sous la condition (2)

$$\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2 = 1.$$

Posant :

$$\psi_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds_0}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds_0}\right)^2 - 1\right],$$

et appliquant les considérations développées par M. JORDAN (3), nous pouvons ramener le système à la forme canonique ; le système exprime, en mettant λ_1 à la place de T, que l'on annule la variation première de l'intégrale

$$\int_{A_0}^{B_0} F ds_0,$$

en posant :

$$F = -(\varphi + \lambda_1 \psi_1).$$

Les équations

$$\frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{ds_0}} = p_1, \qquad \frac{\partial F}{\partial \frac{dy}{ds_0}} = p_2, \qquad \frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{ds_0}} = p_3, \qquad \psi_1 = 0$$

permettent d'exprimer les variables $x' = \frac{dx}{ds_0}$, $y' = \frac{dy}{ds_0}$, $z' = \frac{dz}{dz_0}$, λ_1 en fonction des variables $x, y, z, p_1 p_2 p_3$, par les formules :

$$\lambda_1 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \qquad x' = \frac{p_1}{\lambda_1}, \qquad y' = \frac{p_2}{\lambda_1}, \qquad z' = \frac{p_3}{\lambda_1}.$$

Portant ces valeurs dans

$$p_1 x' + p_2 y' + p_3 z' - F,$$

nous obtenons la fonction

$$\mathcal{H} = \varphi(s_0, x, y, z) + \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

(1) A. CLEBSCH. — *Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens, Journ. für die reine und angewandte Math.*, T. LVII, p. 93-116 [1859], 1860.

(2) Il faut distinguer entre la question actuelle et celle traitée par M. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. I, 1re édition, § **158**, p. 205 et suiv. ; 2e édition, § **146**, p. 201 et suiv.

(3) JORDAN. — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, T. III, 2e édition, n° 375, p. 501, 502.

et nous avons, pour déterminer les variables x, y, z, p_1, p_2, p_3, les équations (canoniques si s_0 ne figure pas dans φ) :

$$\frac{dq_\nu}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\nu}, \qquad \frac{dp_\nu}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_\nu},$$

en désignant, avec M. Appell (1), par q_1, q_2, q_3 les coordonnées x, y, z.

Nous retrouvons, on le voit, les résultats obtenus par M. Appell (2), sous la forme simple qui leur a été donnée d'abord par M. Legoux (3), puis par M. Marcolongo (4), et d'où l'on peut déduire le passage à la méthode de Jacobi et les résultats donnés en premier lieu par Clebsch, dans le mémoire déjà cité (5).

On peut aussi présenter l'exposition précédente, comme nous l'avons fait pour la dynamique du point dans notre première Note et pour la ligne déformable générale.

Partons des équations

$$\frac{d}{ds_0}\left(\mathrm{T}\frac{dx}{ds_0}\right) + \mathrm{X}_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\left(\mathrm{T}\frac{dy}{ds_0}\right) + \mathrm{Y}_0 = 0, \quad \frac{d}{ds_0}\left(\mathrm{T}\frac{dz}{ds_0}\right) + \mathrm{Z}_0 = 0,$$

ou plutôt du système qui leur a donné naissance

$$\mathrm{F} = -\mathrm{T}\frac{dx}{ds_0}, \qquad \mathrm{G} = -\mathrm{T}\frac{dy}{ds_0}, \qquad \mathrm{H} = -\mathrm{T}\frac{dz}{ds_0},$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{ds_0} - \mathrm{X}_0 = 0, \qquad \frac{d\mathrm{G}}{ds_0} - \mathrm{Y}_0 = 0, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{ds_0} - \mathrm{Z}_0 = 0,$$

qui peut être considéré comme définissant les six inconnues x, y, z, F, G, H. Supposons que X_0, Y_0, Z_0 soient des fonctions données de s_0, x, y, z.

Si nous ajoutons les trois équations de la première ligne, après les avoir élevées au carré, nous voyons que T est défini en fonction de F, G, H par la relation

$$\mathrm{T}^2 = \mathrm{F}^2 + \mathrm{G}^2 + \mathrm{H}^2,$$

d'où résultent

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{T}} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{F}}, \qquad \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{T}} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{G}}, \qquad \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{T}} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{H}}.$$

(1) Appell. — *Traité de Mécanique rationnelle*, 1re éd., T. II, Exercice 14, p. 48-49 ; 2e éd., T. I, Exercice 14, p. 583-584.

(2) Appell. — *Réduction à la forme canonique des équations d'un fil flexible et inextensible*, *C. R.*, **96**, p. 688-691, 12 mars 1883 ; *Traité de Mécanique rationnelle*, citation du renvoi précédent.

(3) A. Legoux. — *Equations canoniques, application à la recherche de l'équilibre des fils flexibles et des courbes brachistochrones*, *Mém. de l'Acad. des Sciences, inscriptions et belles lettres de Toulouse*, 8e Série, T. VII, 2e semestre, p. 159-184, 1885.

(4) R. Marcolongo. — *Sull' equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile*, *Rend. dell' Accad. delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società reale di Napoli)*, Série 2a, vol. II, p. 363-368, 1888.

(5) Consulter également Appell, *Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible*, *Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, (1), **1**, p. B_1-B_5, 1887.

La forme normale du système considéré est par suite :

$$\frac{dx}{ds_0} = -\frac{\partial T}{\partial F}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = -\frac{\partial T}{\partial G}, \qquad \frac{dz}{ds_0} = -\frac{\partial T}{\partial H},$$
$$\frac{dF}{ds_0} = X_0, \qquad \frac{dG}{ds_0} = Y_0, \qquad \frac{dH}{ds_0} = -Z_0,$$

où T désigne une fonction de F, G, H définie par la formule $T^2 = F^2 + G^2 + H^2$. Si nous supposons que X_0, Y_0, Z_0, sont les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ changées de signe d'une fonction U de s_0, x, y, z, et si nous posons $\mathcal{H} = -T + U$, le système précédent prend la forme

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial F}, \qquad \frac{dy}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \qquad \frac{dz}{ds_0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H},$$
$$\frac{dF}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \qquad \frac{dG}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}, \qquad \frac{dH}{ds_0} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}.$$

2. Ligne élastique de Lord Kelvin et Tait. — Nous pouvons répéter pour cette ligne ce que nous venons de faire pour la ligne flexible inextensible. Partons d'une fonction W de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r et adjoignons les conditions :

$$\xi = \xi_0 = 1, \qquad \eta = \eta_0 = 0, \qquad \zeta = \zeta_0 = 0.$$

Nous définissons les fonctions F′, G′, H′, I′, J′, K′ ; X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0, au moyen de l'identité

$$\int_{A_0}^{B_0} (\delta W + \mu_1 \delta\xi + \mu_2 \delta\eta + \mu_3 \delta\zeta) ds_0 = \left[F'\delta' x + G'\delta' y + \ldots + K'\delta_{K'} \right]_{B_0}^{A_0}$$
$$- \int_{A_0}^{B_0} (X'_0 \delta' x + Y'_0 \delta' y + \ldots + N'_0 \delta_{K'})\, ds_0 ;$$

ceci revient à remplacer, dans ce qui précède, W par $W_1 + \mu_1 (\xi - 1) + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta$ et à adjoindre aux formules les conditions indiquées $\xi = \xi_0 = 1$, $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$.

Nous retombons, on le voit, *sur la théorie de la ligne déformable correspondant à la fonction* W_1 *de* s_0, ξ, η, ζ, p, q, r *et dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à* $\xi = \xi_0 = 1$, $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$. *Si nous nous plaçons dans le cas du* W_1 *caché*, nous supposons alors que l'on connaît simplement la fonction W $(s_0, 1, 0, 0, p, q, r)$ à laquelle se réduisent simultanément W et W_1 pour $\xi = \xi_0 = 1$, $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$, et nous retrouvons *la théorie développée par* Lord Kelvin et Tait.

Observons que si, pour constituer la ligne précédente, nous tenons, par un changement des auxiliaires, compte *a priori* dans W des trois conditions $\xi = \xi_0 = 1$, $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$, nous sommes conduits à remplacer, dans les calculs relatifs à la ligne déformable générale W par $W(s_0, 1, 0, 0, p, q, r) + \mu_1 (\xi - 1) + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta$, et nous obtenons des formules qui ramènent encore à l'étude d'une ligne déformable, dont on se borne à envisager les

déformations qui correspondent aux trois conditions $\xi = \xi_0 = 1$, $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$. Ces formules, en supposant que μ_1, μ_2, μ_3, *ne sont pas connus*, nous conduisent de nouveau à la théorie de Lord Kelvin et Tait.

Supposons que, en vertu des formules qui déterminent la déformation, on ait exprimé X_0, Y_0, Z_0, L_0 M_0, N_0, en fonction de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2 λ_3, de sorte que

$$X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz + \mathfrak{L}_0 d\lambda_1 + \mathfrak{M}_0 d\lambda_2 + \mathfrak{N}_0 d\lambda_3,$$

soit la différentielle totale d'une fonction U de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, considérée simplement par rapport à x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3. Supposons en outre que nous soyons dans le cas du W caché, ou dans le cas envisagé en dernier lieu. D'après ce qui précède, les équations de la question, dans lesquelles figurent X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, ne sont autres que les équations des extrémales du problème du calcul des variations consistant à déterminer un extremun de l'intégrale

$$\int_{A_0}^{B_0} (W + U)\, ds_0,$$

où W est une fonction donnée de s_0, p, q, r, en supposant que les six fonctions inconnues x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, vérifient les trois équations différentielles :

$$\xi - 1 = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Posant $\psi_1 = \xi - 1$, $\psi_2 = \eta$, $\psi_3 = \zeta$, et appliquant les considérations développées par M. Jordan, nous pouvons ramener le système à la forme canonique; le système exprime, en mettant F', G', H' à la place des lettres λ_1, λ_2, λ_3, de M. Jordan, que l'on annule la variation première de l'intégrale $\int_{A_0}^{B_0} \mathcal{F} ds_0$, en posant

$$\mathcal{F} = W + U + F'\psi_1 + G'\eta + H'\zeta.$$

Les équations

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{dx}{ds_0}} = p_1, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{dy}{ds_0}} = p_2, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{dz}{ds_0}} = p_3, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{d\lambda_1}{ds_0}} = p_4, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{d\lambda_2}{ds_0}} = p_5, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \frac{d\lambda_3}{ds_0}} = p_6,$$

$$\psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \quad \psi_3 = 0,$$

permettent d'exprimer les neuf variables $x' = \frac{dx}{ds_0}$, $y' = \frac{dy}{ds_0}$, $z' = \frac{dz}{ds_0}$, $\lambda_1' = \frac{d\lambda_1}{ds_0}$, $\lambda_2' = \frac{d\lambda_2}{ds_0}$, $\lambda_3' = \frac{d\lambda_3}{ds_0}$, F', G', H', en fonction des douze variables x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, p_1, p_2, ... p_6, au moyen des formules

$$x' = \alpha, \quad y' = \alpha', \quad z' = \alpha'',$$

$$F' = \alpha p_1 + \alpha' p_2 + \alpha'' p_3, \quad G' = \beta p_1 + \beta' p_2 + \beta'' p_3, \quad H' = \gamma p_1 + \gamma' p_2 + \gamma'' p_3,$$

et par la résolution des équations :

$$(29)\qquad \begin{cases} p_4 = \dfrac{\partial W}{\partial p}\,\varpi_1' + \dfrac{\partial W}{\partial q}\,\chi_1' + \dfrac{\partial W}{\partial r}\,\sigma \\ p_5 = \dfrac{\partial W}{\partial p}\,\varpi_2' + \dfrac{\partial W}{\partial q}\,\chi_2' + \dfrac{\partial W}{\partial r}\,\sigma_2' \\ p_6 = \dfrac{\partial W}{\partial p}\,\varpi_3' + \dfrac{\partial W}{\partial q}\,\chi_3' + \dfrac{\partial W}{\partial r}\,\sigma_3' \end{cases}$$

en conservant, pour un instant, les notations du § **10.**

Portant ces valeurs dans

$$p_1x' + p_2y' + p_3z' + p_4\lambda_1' + p_5\lambda_2' + p_6\lambda_3' - \mathcal{F},$$

nous obtenons la fonction $\mathcal{H}$ de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, p_1, ... p_6, qui se déduit de

$$-W - U + \alpha p_1 + \alpha' p_2 + \alpha'' p_3 + p\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial r},$$

par la substitution à p, q, r des valeurs en fonction de s_0, λ_1, λ_2, λ_3, p_4, p_5, p_6 que l'on déduit des équations (29).

Nous avons, pour déterminer les douze variables x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, p_1, ... p_6, les équations (canoniques, si s_0 ne figure pas explicitement) :

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_1},\quad \frac{dy}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_2},\quad \frac{dz}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_3},\quad \frac{d\lambda_1}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_4},\quad \frac{d\lambda_2}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_5},\quad \frac{d\lambda_3}{ds_0} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_6},$$
$$\frac{dp_1}{ds_0} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x},\quad \frac{dp_2}{ds_0} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y},\quad \frac{dp_3}{ds_0} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z},\quad \frac{dp_4}{ds_0} = -\frac{d\mathcal{H}}{\partial\lambda_1},$$
$$\frac{dp_5}{ds_0} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_2},\quad \frac{dp_6}{ds_0} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\lambda_3},$$

dont on pourra conclure l'application de la méthode de Jacobi à la ligne étudiée.

On peut aussi présenter l'exposition précédente, comme nous l'avons fait pour la ligne déformable générale et ainsi que pour la dynamique du point dans notre première note.

3. Ligne déformable où Mx' est tangent en M à (M). Partons toujours d'une fonction W de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r et adjoignons les conditions $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$. Nous définissons les fonctions F', G', H', I', J' K', X'_0, Y'_0, Z'_0, L'_0, M'_0, N'_0 au moyen de l'identité

$$\int_{A_0}^{B_0}(\delta W + \mu_1\delta\eta + \mu_2\delta\zeta)ds = \left[F'\delta' x + G'\delta' y + \ldots + K'\delta_{K'}\right]_{A_0}^{B_0}$$
$$-\int_{A_0}^{B_0}(X'_0\delta' x + Y'_0\delta' y + \ldots + N'_0\delta_{K'})ds_0$$

Ceci revient à remplacer, dans ce qui précède, W par $W_1 = W + \mu_1\eta + \mu_2\zeta$ et à adjoindre aux formules les conditions indiquées $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$.

Nous retrouvons, on le voit, *la théorie de la ligne déformable correspondant à la fonction* W_1 *de* s_0, ξ, η, ζ, p, q, r *et dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à* $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$. *Si nous nous plaçons dans le cas du* W_1 *caché*, nous supposons alors que l'on connaît simplement la fonction W $(s_0, \xi, o, o, p, q, r)$ à laquelle se réduisent simultanément W et W_1, pour $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$.

Si, pour constituer la ligne précédente, nous tenons, par un changement des auxiliaires, compte *a priori* dans W des deux conditions $\eta = \eta_0 = 0$, $\zeta = \zeta_0 = 0$, nous sommes conduits à remplacer dans les calculs relatifs à la ligne déformable générale, W par $W(s_0, \xi, o, o, p, q, r) + \mu_1\eta + \mu_2\zeta$ et nous tombons sur des formules qui ramènent encore à l'étude d'une ligne déformable, dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent aux deux conditions $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$.

Supposons qu'en vertu des formules qui déterminent la déformation, on ait exprimé X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0, en fonction de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, de sorte que

$$X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz + \mathfrak{L}_0 d\lambda_1 + \mathfrak{M}_0 d\lambda_2 + \mathfrak{N}_0 d\lambda_3$$

soit la différentielle totale d'une fonction U de s_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, considérée simplement par rapport à x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3. Supposons en outre que nous soyons dans le cas du W caché ou dans le cas envisagé en dernier lieu. D'après ce qui précède, les équations de la question, dans lesquelles figurent X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, ne sont autres que les équations des extrémales du problème du calcul des variations consistant à déterminer un extremum de l'intégrale

$$\int_{A^0}^{B_0} (W + U)\, ds_0,$$

où W est une fonction donnée de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r, en supposant que les six fonctions inconnues x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 vérifient les deux équations différentielles $\eta = o$, $\zeta = o$. Les considérations antérieures se répètent donc, et il en serait de même pour toutes les autres lignes particulières que nous avons envisagées.

29. État infiniment voisin de l'état naturel. Modules de déformation de Hooke. Valeurs critiques des modules généraux. Rapprochement avec la dynamique du trièdre. — Revenons à la ligne déformable générale. Supposons que, dans l'état naturel, l'action soit nulle, ainsi que l'effort et le moment de déformation et de même que la force et le moment extérieurs. Dans ce cas, non seulement la fonction W doit s'annuler identiquement, mais aussi les six dérivées partielles de W par rapport à ξ, η, ζ, p, q, r, pour les valeurs ξ_0, η_0, ζ_0, p_0, q_0, r_0 de ces lettres. Admettons de plus que W soit développable, dans le voisinage de $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, $\zeta = \zeta_0$, $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, suivant les puissances entières positives de $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\dots$ $r - r_0$; dans ces conditions, on aura

$$W = W_2 + W_3 + \dots,$$

en représentant par W_2, W_3, ... des polynômes homogènes de degrés 2, 3, ... des différences $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, ..., $r - r_0$.

Les coordonnées d'un point M_0 de la ligne (M_0) à l'état normal et les trois paramètres au moyen desquels on exprime les cosinus directeurs des axes du trièdre adjoint à ce point étant respectivement x_0, y_0, z_0, λ_{10}, λ_{20}, λ_{30}, supposons que les coordonnées x, y, z du point correspondant M dans l'état déformé (M) et les paramètres λ_1, λ_2, λ_3, relatifs aux axes du trièdre adjoint soient des fonctions de s_0 et de h, développables suivant les puissances de h par les formules :

$$\begin{aligned} x &= x_0 + x_1 + \ldots + x_i + \ldots, & \lambda_1 &= \lambda_{10} + \lambda_{11} + \ldots + \lambda_{1i} + \ldots, \\ y &= y_0 + y_1 + \ldots + y_i + \ldots, & \lambda_2 &= \lambda_{20} + \lambda_{21} + \ldots + \lambda_{2i} + \ldots, \\ z &= z_0 + z_1 + \ldots + z_i + \ldots & \lambda_3 &= \lambda_{30} + \lambda_{31} + \ldots + \lambda_{3i} + \ldots, \end{aligned}$$

dans lesquelles x_i, y_i, z_i, λ_{1i}, λ_{2i}, λ_{3i}, désignent les termes qui renferment h^i en facteur. Nous introduisons ces développements en série, pour abréger l'exposition, et nous admettrons qu'ils se prêtent aux procédés ordinaires de calcul. Les formules du § **14** nous permettent de calculer les développements de F, G, H, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{K}$; X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ suivant les puissances de h ; les termes indépendants de h sont nuls et les termes, F_1, G_1, H_1, $\mathfrak{I}_1$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{K}_1$; X_{01}, Y_{01}, Z_{01}, $\mathfrak{L}_{01}$, $\mathfrak{M}_{01}$, $\mathfrak{N}_{01}$, sont donnés par les formules

$$F_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dx^{(1)}}{ds_0}}, \quad G_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dy^{(1)}}{ds_0}}, \quad H_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dz^{(1)}}{ds_0}}, \quad \mathfrak{I}_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_1^{(1)}}{ds_0}}, \quad \mathfrak{J}_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_2^{(1)}}{ds_0}}, \quad \mathfrak{K}_1 = \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_3^{(1)}}{ds_0}},$$

$$X_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dx^{(1)}}{ds_0}}, \qquad Y_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dy^{(1)}}{ds_0}}, \qquad Z_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{dz^{(1)}}{ds_0}}$$

$$\mathfrak{L}_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_1^{(1)}}{ds_0}} - \frac{\partial W_2}{\partial \lambda_1^{(1)}}, \quad \mathfrak{M}_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_2^{(1)}}{ds_0}} - \frac{\partial W_2}{\partial \lambda_2^{(1)}}, \quad \mathfrak{N}_{01} = \frac{d}{ds_0} \frac{\partial W_2}{\partial \dfrac{d\lambda_3^{(1)}}{ds_0}} - \frac{\partial W_2}{\partial \lambda_3^{(1)}},$$

où l'on pose

$$x^{(1)} = x_0 + x_1, \; y^{(1)} = y_0 + y_1, \; z^{(1)} = z_0 + z_1, \; \lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + \lambda_{11},$$
$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} + \lambda_{21}, \; \lambda_3^{(1)} = \lambda_{30} + \lambda_{31}.$$

Si nous considérons, sous le nom *d'état de déformation infiniment voisin de l'état naturel*, l'état (M) où le point M a pour coordonnées $x^{(1)}$, $y^{(1)}$, $z^{(1)}$, et où les paramètres relatifs au trièdre adjoint ont pour valeurs $\lambda_1^{(1)}$, $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_3^{(1)}$, si d'autre part nous appelons *effort et moment de déformation, force et moment extérieurs*, relativement à cet état, les vecteurs (F_1, G_1, H_1), $(\mathfrak{I}_1, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{K}_1)$, (X_{01}, Y_{01}, Z_{01}), (L_{01}, M_{01}, N_{01}), où L_{01}, M_{01}, N_{01} se calculent au moyen de λ_{10}, λ_{20}, λ_{30}, $\mathfrak{L}_{01}$, $\mathfrak{M}_{01}$, $\mathfrak{N}_{01}$, de la même façon que L_0, M_0, N_0, au moyen de λ_1, λ_2, λ_3, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, nous parvenons aux hypothèses généralement faites par les auteurs classiques, et où les deux premiers vecteurs sont des fonctions linéaires des éléments qui caractérisent l'état déformé considéré ; nous retrouvons, par conséquent, ce qu'on nomme la *loi de* Hooke *généralisée*, mais en la limitant, comme il convient, par *la condition de respecter le prin-*

cipe de la conservation de l'énergie. Pour satisfaire à cette condition, dans la méthode classique, il faut refaire en sens inverse le chemin que nous venons de suivre dans notre exposition.

Les coefficients, dans les fonctions linéaires qui expriment la loi de HOOKE, sont les *modules de déformation* de la ligne déformable, dans son état infiniment voisin de l'état naturel ; ils sont *invariables* en un point donné de la ligne. Cette notion de module peut être généralisée, en envisageant les dérivées premières et secondes de la fonction W ; à côté du cas où les modules généraux sont définis et continus, on peut considérer celui où ils auraient des valeurs critiques.

Les considérations précédentes se répètent facilement pour les différentes lignes déformables particulières ; elles doivent être rapprochées de celles que nous avons développées dans notre première note. La dynamique du trièdre se rattache en effet à ce qui précède d'une manière tout à fait directe. Il suffit de regarder l'arc s_0 comme le *temps t*, et la ligne déformable comme une *trajectoire* ; cette simple constatation explique immédiatement les analogies qui ont été reconnues depuis longtemps entre la dynamique classique du point et du corps invariable et la statique de la ligne déformable.

Observons que, à la proposition obtenue précédemment (1), dans le cas du corps invariable, à l'égard de l'énergie cinétique, correspond, pour la ligne déformable, une proposition d'après laquelle, lorsque W ne dépend pas explicitement de s_0, les formules (10) entraînent que l'expression :

$$(\xi X_0' + \eta Y_0' + \zeta Z_0' + pL_0' + qM_0' + rN_0')ds_0,$$

qui peut être mise sous la forme

$$X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz + \mathfrak{L}_0 d\lambda_1 + \mathfrak{M}_0 d\lambda_2 + \mathfrak{N}_0 d\lambda_3,$$

est égale à la différentielle de la quantité :

$$\xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} + p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} + r \frac{\partial W}{\partial r} - W,$$

qui s'est déjà présentée au § **14.**

Observons d'autre part que l'on peut adjoindre aux développements donnés dans notre première Note, à l'égard du corps invariable, des considérations analogues à celles qui ont été développées dans le travail actuel, en ce qui concerne les liaisons, pour la ligne déformable.

III. — STATIQUE DE LA SURFACE DÉFORMABLE ET DYNAMIQUE DE LA LIGNE DÉFORMABLE

30. Surface déformable. Etat naturel et état déformé. — Les développements, dans lesquels nous sommes entrés à l'égard de la ligne déformable, vont se reproduire, comme nous allons le voir, presque sans chan-

(1) *Note sur la dynamique du point et du corps invariable*, Tome I, p. 261.

gement, dans les théories de la surface déformable et du milieu déformable à trois dimensions. Cette répétition met en évidence la fécondité du concept d'action euclidienne ; elle suggère de nombreux rapprochements et ouvre un vaste champ d'étude, que les premiers chercheurs n'ont pu commencer à explorer qu'avec beaucoup de difficulté, mais qu'il est possible aujourd'hui d'aborder avec succès, dans l'état actuel de la théorie générale des surfaces géométriques et des coordonnées curvilignes, tel que M. Darboux l'a présenté dans ses grands ouvrages (1).

Considérons une surface (M_0) décrite par un point M_0 dont les coordonnées x_0, y_0, z_0, par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, sont des fonctions de deux paramètres, que nous supposons choisis d'une manière quelconque et que nous désignerons par ρ_1 et ρ_2. Adjoignons à chaque point M_0 de la surface (M_0) un trièdre trirectangle dont les axes M_0x_0', M_0y_0', M_0z_0' ont, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, des cosinus directeurs qui sont respectivement α_0, α_0', α_0'' ; β_0, β_0', β_0'' ; γ_0, γ_0', γ_0'', et qui sont des fonctions des mêmes paramètres ρ_1 et ρ_2. L'ensemble continu à deux dimensions de tels trièdres $M_0x_0'y_0'z_0'$ sera ce que nous appellerons une *surface déformable*.

Donnons au point M_0 un déplacement M_0M et soient x, y, z, les coordonnées du point M par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz. Imprimons en outre au trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ une rotation qui amènera finalement ses axes à être ceux d'un trièdre $Mx'y'z'$ que nous adjoindrons au point M ; nous définirons cette rotation en nous donnant, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, les cosinus directeurs α, α', α'' ; β, β', β'' ; γ, γ', γ'' des axes Mx, My', Mz'. L'ensemble continu à deux dimensions des trièdres $Mx'y'z'$ sera ce que nous appellerons *l'état déformé* de la surface déformable considérée qui, dans son état primitif, sera dite à l'*état naturel*.

31. Eléments cinématiques relatifs aux états de la surface déformable. — Désignons par $\xi_i^{(0)}$, $\eta_i^{(0)}$, $\zeta_i^{(0)}$ les *composantes de la vitesse de l'origine* M_0 *des axes* M_0x_0', M_0y_0', M_0z_0' *suivant ces axes, quand* ρ_i *varie seul et joue le rôle du temps* ; soient également $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$ les quantités qui définissent les projections sur ces axes de la rotation instantanée du trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ relative au paramètre ρ_i. Nous désignerons par ξ_i, η_i, ξ_i et par p_i, q_i, r_i, les quantités analogues pour le trièdre $Mx'y'z'$, lorsqu'on le rapporte, comme le trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ au trièdre fixe $Oxyz$.

Les éléments que nous venons d'introduire se calculent à la façon habituelle ; on a :

$$(30)\quad \begin{cases} \xi_i = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \alpha' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \alpha'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i} \\ \eta_i = \beta \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \beta' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \beta'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i} \\ \zeta_i = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \gamma' \dfrac{\partial y}{\partial y_i} + \gamma'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i} \end{cases} \qquad (31)\quad \begin{cases} p_i = \Sigma\gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i} = -\Sigma\beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} \\ q_i = \Sigma\alpha \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} = -\Sigma\gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} \\ r_i = \Sigma\beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} = -\Sigma\alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i}. \end{cases}$$

(1) Gaston Darboux. — *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Paris, 1887-1896 ; *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes*, Tome I, Paris, 1898.

Les éléments linéaires ds_0 et ds de la surface, dans l'état naturel et dans l'état déformé seront définis par les formules :

$$ds_0^2 = \mathcal{E}_0 d\rho_1^2 + 2\mathcal{F}_0 d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{G}_0 d\rho_2^2, \qquad ds^2 = \mathcal{E} d\rho_1^2 + 2\mathcal{F} d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{G} d\rho_2^2.$$

où $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ se calculeront par les doubles formules suivantes :

$$(32)\qquad \begin{cases} \mathcal{E} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \\ \mathcal{F} = \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2} + \dfrac{\partial y}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2} + \dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2} = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2, \\ \mathcal{G} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2. \end{cases}$$

et où $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{G}_0$ se calculeront par des formules analogues.

Désignons par x', y', z', les projections du segment OM sur les axes Mx', My', Mz', en sorte que les coordonnées par rapport à ces axes du point fixe O seront $-x'$, $-y'$, $-z'$. Nous aurons les formules connues :

$$(33)\qquad \begin{cases} \xi_i - \dfrac{\partial x'}{\partial \rho_i} - qz' + ry' = 0, \quad \eta_i - \dfrac{\partial y'}{\partial \rho_i} - rx' + pz' = 0, \\ \zeta_i - \dfrac{\partial z'}{\partial \rho_i} - py' + qx' = 0, \end{cases}$$

qui donnent de nouvelles expressions de ξ_i, η_i, ζ_i.

32. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé. — Supposons qu'on imprime à chacun des trièdres de l'état déformé un déplacement infiniment petit pouvant varier d'une façon continue avec ces trièdres. Désignons par δx, δy, δz ; $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ..., $\delta\gamma''$ les variations respectives de x, y, z ; x', y', z' ; α, α', ... γ''. Les variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ s'expriment par des formules telles que la suivante :

$$(34)\qquad \delta\alpha = \beta\delta\kappa' - \gamma\delta\iota',$$

au moyen des trois auxiliaires $\delta\iota'$, $\delta\jmath'$, $\delta\kappa'$, qui sont les composantes suivant Mx', My', Mz' de la rotation instantanée bien connue attachée au déplacement infiniment petit considéré. Les variations δx, δy, δz sont les projections sur Ox, Oy, Oz, du déplacement infiniment petit éprouvé par le point M ; les projections $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ de ce déplacement sur Mx', My', Mz' s'en déduisent immédiatement et ont pour valeurs :

$$(35)\qquad \begin{cases} \delta' y = \delta x' + z'\delta\jmath' - y'\delta\kappa', \qquad \delta' y = \delta y' + x'\delta\kappa' - z'\delta\iota', \\ \delta' z = \delta z' + y'\delta\iota' - x'\delta\jmath'. \end{cases}$$

Proposons-nous de déterminer les variations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, δp_i, δq_i, δr_i éprou-

vées respectivement par ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i. D'après les formules (31), nous avons :

$$\delta p_i = \sum \left(\frac{\partial \beta}{\partial \rho_i} \delta\gamma + \gamma \frac{\partial \delta\beta}{\partial \rho_i} \right),$$

$$\delta q_i = \sum \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} \delta\alpha + \alpha \frac{\partial \delta\gamma}{\partial \rho_i} \right),$$

$$\delta r_i = \sum \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} \delta\beta + \beta \frac{\partial \delta\alpha}{\partial \rho_i} \right).$$

Remplaçons $\delta\alpha$ par sa valeur $\beta\delta\kappa' - \gamma\delta\jmath'$, et $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ par leurs valeurs analogues ; il vient :

$$(36) \quad \begin{cases} \delta p_i = \dfrac{\partial \delta\imath'}{\partial \rho_i} + q_i\delta\kappa' - r_i\delta\jmath', \qquad \delta q_i = \dfrac{\partial \delta\jmath'}{\partial \rho_i} + r_i\delta\imath' - p_i\delta\kappa' \\ \delta r_i = \dfrac{\partial \delta\kappa'}{\partial \rho_i} + p_i\delta\jmath' - q_i\delta\imath'. \end{cases}$$

Les formules (33) nous donnent de même trois formules dont la première est :

$$\delta\xi_i = \frac{\partial \delta x'}{\partial \rho_i} + q_i\delta z' - r_i\delta y' + z'\delta q_i - y'\delta r_i ;$$

remplaçons δp_i, δq_i, δr_i par leurs valeurs données par les formules (36) ; il vient :

$$(37) \quad \begin{cases} \delta\xi_i = \eta_i\delta\kappa' - \zeta_i\delta\jmath' + \dfrac{\partial \delta' x}{\partial \rho_i} + q_i\delta' x - r_i\delta' y \\ \delta\eta_i = \zeta_i\delta\imath' - \xi_i\delta\kappa' + \dfrac{\partial \delta' y}{\partial \rho_i} + r_i\delta' y - p_i\delta' z, \\ \delta\zeta_i = \xi_i\delta\jmath' - \eta_i\delta\imath' + \dfrac{\partial \delta' z}{\partial \rho_i} + p_i\delta' z - q_i\delta' x, \end{cases}$$

en introduisant, pour abréger l'écriture, les trois symboles $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ définis par les formules (35).

33. Action euclidienne de déformation sur une surface déformable. — Considérons une fonction W de *deux positions infiniment voisines* du trièdre $Mx'y'z'$, c'est-à-dire une fonction de ρ_1, ρ_2, de x, y, z, α, α', ... γ'' et de leurs dérivées premières par rapport à ρ_1 et ρ_2. Conservant les notations du § 31 et posant :

$$\Delta_0 = \sqrt{\mathcal{E}_0\mathcal{G}_0 - \mathcal{F}_0^2},$$

proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour que l'intégrale

$$\iint W\Delta_0 d\rho_1\delta\rho_2,$$

étendue à une portion quelconque de la surface (M_0) ait une variation nulle, quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres de la surface déformable, prise dans son état déformé *à une même transformation infinitésimale quelconque du groupe des déplacements euclidiens.*

Il s'agit, en définitive, de déterminer W de façon que l'on ait

$$\delta W = 0,$$

lorsque, d'une part, l'origine M du trièdre $Mx'y'z'$ subit un déplacement infiniment petit, dont les projections δx, δy, δz sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$(38) \qquad \begin{cases} \delta x = (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t \\ \delta y = (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t \\ \delta z = (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t, \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 sont six constantes arbitraires et δt une quantité infiniment petite indépendante de ρ_1, ρ_2, et lorsque, d'autre part, ce trièdre $Mx'y'z'$ subit une rotation infiniment petite, dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\omega_1 \delta t, \qquad \omega_2 \delta t, \qquad \omega_3 \delta t.$$

Observons que, dans le cas présent, les variations $\delta\xi_1$, $\delta\eta_1$, $\delta\zeta_1$, δp_1, δq_1, δr_1 : $\delta\xi_2$, $\delta\eta_2$, $\delta\zeta_2$, δp_2, δq_2, δr_2 des douze expressions ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1 ; ξ_2, η_2, ζ_2, p_2, q_2, r_2, sont nulles, comme cela résulte de la théorie bien connue du trièdre mobile, et comme nous pouvons d'ailleurs le vérifier immédiatement au moyen des formules (36) et (37), en y remplaçant $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$; δ_1', δ_J', δ_K', par leurs valeurs actuelles. Il en résulte que nous obtenons une solution de la question, en prenant pour W une fonction arbitraire de ρ_1, ρ_2 et des douze expressions ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1, ; ξ_2, η_2, ζ_2, p_2, q_2, r_2, ; nous allons maintenant montrer que nous obtenons ainsi la solution générale [1] du problème que nous nous sommes posés.

Observons à cet effet que les relations (31) permettent, au moyen de formules bien connues, d'exprimer les dérivées premières des neuf cosinus α, α'... γ'' par rapport à ρ_1 et à ρ_2, au moyen de ces cosinus et de p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2. Remarquons d'autre part que les formules (30) permettent de concevoir qu'on exprime les neuf cosinus α, α', ... γ'' au moyen de ξ_1, η_1, ζ_1, et des dérivées premières de x, y, z par rapport à ρ_1, ou au moyen de ξ_2, η_2, ζ_2 et des dérivées premières de x, y, z par rapport à ρ_2. Il est d'ailleurs inutile, dans ce dernier cas, que nous fassions une hypothèse sur le mode de résolution, car il est clair que nous n'obtenons pas une forme plus générale que celle dont nous sommes partis, en supposant finalement la fonction W que nous cherchons une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2 de x, y, z et de leurs dérivées premières par

(1) Nous supposons, dans ce qui va suivre, que *la surface déformable est susceptible de toutes les déformations possibles*, que, par suite, *l'état déformé peut être pris absolument arbitraire* ; c'est ce que nous exprimons en disant que *la surface est libre.*

rapport à ρ_1, ρ_2, et enfin de ξ_1, η_1, ζ_1, p_1, q_1, r_1, ; ξ_2, η_2, ζ_2, p_2, q_2, r_2, ce que nous indiquerons en écrivant :

$$W = W\left(\rho_1, \rho_2, x, y, z, \frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \frac{\partial z}{\partial \rho_i}, \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \ldots, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \ldots, p_1, q_1, r_1, p_2 \ldots\right),$$

Les variations $\delta\xi_1$, ... δr_1, $\delta\xi_2$, ... δr_2 étant nulles, dans le cas actuel, ainsi qu'on l'a remarqué il y a un instant, nous avons finalement à écrire, pour la nouvelle forme de W, que l'on a, en vertu des formules (38), et quels que soient a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 :

$$\frac{\partial W}{\partial x}\delta x + \frac{\partial W}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W}{\partial z}\delta z + \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_i}} \delta \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_i}} \delta \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_i}} \delta \frac{\partial z}{\partial \rho_i} \right) = 0,$$

Remplaçons δx, δy, δz par leurs valeurs (38) et $\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_i}$, $\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_i}$, $\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_i}$ par les valeurs qu'on en déduit en différentiant ; égalons à zéro les coefficients de a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 ; il nous vient les six conditions suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_i}} \frac{\partial z}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_i}} \frac{\partial y}{\partial \rho_i} \right) = 0, \qquad \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_i}} \frac{\partial x}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_i}} \frac{\partial z}{\partial \rho_i} \right) = 0,$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_i}} \frac{\partial y}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_i}} \frac{\partial x}{\partial \rho_i} \right) = 0,$$

qui sont des identités, si nous admettons que les expressions qui figurent dans W ont été réduites au nombre moindre.

Les trois premières nous montrent alors, ce que l'on pouvait prévoir facilement, que W est indépendant de x, y, z ; les trois dernières expriment que W ne dépend des dérivées premières de x, y, z que par l'intermédiaire des quantités $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ définies par les formules (32) ; nous voyons donc finalement que *la fonction* W *cherchée a la forme remarquable :*

$$W(\rho_1, \rho_2, \xi_1, \eta_1, \zeta_1 ; \xi_2, \eta_2, \zeta_2 ; p_1, q_1, r_1 ; p_2, q_2, r_2),$$

analogue à celle rencontrée précédemment pour la ligne déformable.

Désignons par Δ la quantité analogue à Δ_0, définie par la formule :

$$\Delta = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}.$$

Si nous multiplions W par l'élément d'aire $d\sigma_0 = \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$ de la surface (M_0) le produit $W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$ obtenu est, dans le groupe des déplacements euclidiens,

un invariant analogue à l'élément d'aire de la surface (M). De même que la valeur de l'intégrale :

$$\iint_{c_0} \frac{\Delta}{\Delta_0}\,\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = \iint_{c_0} \Delta d\rho_1 d\rho_2,$$

prise à l'intérieur d'un contour C_0 de la surface (M_0), ou du contour correspondant C de la surface (M), détermine *l'aire* du domaine délimité sur (M) par C, de même, en associant dans l'esprit la notion d'action au passage de l'état naturel (M_0) à l'état déformé (M), nous adjoindrons la fonction W aux éléments de définition de la surface déformable, et nous dirons que l'intégrale :

$$\iint_{c_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$$

est *l'action de déformation*, à l'intérieur du contour C, sur la surface déformée.

Nous dirons d'autre part que W est la *densité* de l'action de déformation en un point de la surface déformée, rapportée à l'unité d'aire de la surface non déformée; $W\,\frac{\Delta_0}{\Delta}$ sera cette densité en un point, rapportée à l'unité d'aire de la surface déformée.

34. La force et le moment extérieurs; l'effort et le moment de déformation extérieurs; l'effort et le moment de déformation en un point d'une surface déformée. — Considérons une variation *quelconque* de l'action de déformation à l'intérieur d'un contour C de la surface (M), savoir :

$$\delta \iint_{c_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = \iint_{c_0} \sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\delta\xi_i + \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\delta\eta_i + \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\delta\zeta_i + \frac{\partial W}{\partial p_i}\delta p_i + \frac{\partial W}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial W}{\partial r_i}\delta r_i \right) \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2.$$

Nous pouvons l'écrire, en vertu des formules (36) et (37) du § **32** :

$$\begin{aligned}
\delta \iint_{c_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = \iint_{c_0} \sum_i \Big[& \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\left(\eta_i \delta_K' - \zeta_i \delta_J' + \frac{\partial \delta' x}{\partial \rho_i} + q_i \delta' z - r_i \delta' y\right) \\
& + \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\left(\zeta_i \delta_I' - \xi_i \delta_K' + \frac{\partial \delta' y}{\partial \rho_i} + r_i \delta' x - p_i \delta' z\right) \\
& + \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\left(\xi_i \delta_J' - \eta_i \delta_I' + \frac{\partial \delta' z}{\partial \rho_i} + p_i \delta' y - q_i \delta' x\right) \\
& + \frac{\partial W}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \delta_I'}{\partial \rho_i} + q_i \delta_K' - r_i \delta_J'\right) + \frac{\partial W}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \delta_J'}{\partial \rho_i} + r_i \delta_I' - p_i \delta_K'\right) \\
& + \frac{\partial W}{\partial r_i}\left(\frac{\partial \delta_K'}{\partial \rho_i} + p_i \delta_J' - q_i \delta_I'\right) \Big] \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2.
\end{aligned}$$

Appliquons la formule de GREEN aux termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport à ρ_1 ou par rapport à ρ_2 ; il vient :

$$\delta \iint_{C_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = \int_{C_0} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1}\delta' x + \frac{\partial W}{\partial \eta_1}\delta' y + \frac{\partial W}{\partial \zeta_1}\delta' z + \frac{\partial W}{\partial p_1}\delta_1' + \frac{\partial W}{\partial q_1}\delta_2' + \frac{\partial W}{\partial r_1}\delta_3' \right) \Delta_0 d\rho_2 \right.$$
$$\left. - \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_2}\delta' x + \frac{\partial W}{\partial \eta_2}\delta' y + \frac{\partial W}{\partial \zeta_2}\delta' z + \frac{\partial W}{\partial p_2}\delta_1' + \frac{\partial W}{\partial q_2}\delta_2' + \frac{\partial W}{\partial r_2}\delta_3' \right) \right] \Delta_0 d\rho_1$$
$$- \iint_{C_0} \left\{ \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right) + q_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \right] \delta' x \right.$$
$$+ \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \right) + r_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \right] \delta' y$$
$$+ \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \right) + p_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right] \delta' z$$
$$+ \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial p_i} \right) + q_i \frac{\partial W}{\partial r_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \right] \delta_1'$$
$$+ \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial q_i} \right) + r_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial r_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \right] \delta_2'$$
$$\left. + \sum_i \left[\frac{1}{\Delta_0} \frac{\partial}{\partial \rho_i} \left(\Delta_0 \frac{\partial W}{\partial r_i} \right) + p_i \frac{\partial W}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \xi_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right] \delta_3' \right\} \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$$

L'intégrale curviligne, qui figure dans la formule précédente, doit être précisée en indiquant quel est son sens de parcours ; ce sens se définit, comme l'on sait, au moyen de la rotation qui amène la partie positive de la courbe (ρ_2), c'est-à-dire la partie qui correspond au sens dans lequel la coordonnée ρ_1 qui varie sur cette courbe augmente, du côté de la partie positive de la courbe (ρ_1). On peut encore préciser cette intégrale curviligne, à l'exemple de BELTRAMI, en la mettant sous la forme qui provient de l'application des formules :

$$\iint_{C_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1} d\rho_1 d\rho_2 = \int_{C_0} \left(\mathcal{E}_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial n_0} + \mathcal{F}_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial n_0} \right) \frac{\varphi}{\Delta_0} ds_0,$$
$$\iint_{C_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2} d\rho_1 d\rho_2 = \int_{C_0} \left(\mathcal{F}_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial n_0} + \mathcal{G}_0 \frac{\partial \rho_2}{\partial n_0} \right) \frac{\varphi}{\Delta_0} ds_0,$$

où φ désigne une fonction de ρ_1, ρ_2, où ds_0 est la valeur absolue de l'élément linéaire de la courbe (C_0) et où n_0 indique la direction de la normale au contour (C_0), tracée dans le plan tangent de la surface (M_0) et dirigée vers l'extérieur de la région limitée par ce contour. Pour obtenir la nouvelle forme de l'intégrale curviligne, il suffira de remplacer sous le signe d'intégration,

dans la première forme obtenue, $d\rho_1$ et $d\rho_2$ respectivement par les valeurs suivantes :

$$-\left(\mathcal{F}_0\frac{\partial\rho_1}{\partial n_0}+\mathcal{G}_0\frac{\partial\rho_2}{\partial n_0}\right)\frac{ds_0}{\Delta_0},\qquad\left(\mathcal{E}_0\frac{\partial\rho_1}{\partial n_0}+\mathcal{F}_0\frac{\partial\rho_2}{\partial n_0}\right)\frac{ds_0}{\Delta_0}.$$

Si nous désignons par λ_0', μ_0', ν_0' les cosinus directeurs, par rapport au trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$, de la normale extérieure au contour C_0 qui vient d'être considérée, on peut donner aux deux expressions précédentes, qui doivent être substituées à $d\rho_1$ et $d\rho_2$, les formes respectives suivantes (1) :

$$(39)\quad -(\lambda_0'\xi_2^{(0)}+\mu_0'\eta_2^{(0)}+\nu_0'\zeta_2^{(0)})\frac{ds_0}{\Delta_0},\ (\lambda_0'\xi_1^{(0)}+\mu_0'\eta_1^{(0)}+\nu_0'\zeta_1^{(0)})\frac{ds_0}{\Delta_0},$$

en vertu des formules :

$$\lambda_0'=\xi_1^{(0)}\frac{\partial\rho_1}{\partial n_0}+\xi_2^{(0)}\frac{\partial\rho_2}{\partial n_0},\ \mu_0'=\eta_1^{(0)}\frac{\partial\rho_1}{\partial n_0}+\eta_2^{(0)}\frac{\partial\rho_2}{\partial n_0},\ \nu_0'=\zeta_1^{(0)}\frac{\partial\rho_1}{\partial n_0}+\zeta_2^{(0)}\frac{\partial\rho_2}{\partial n_0}.$$

qui déterminent λ_0', μ_0', ν_0'.

Posons, en désignant par ds_0 la valeur absolue de l'élément d'arc du contour C_0 tracé sur la surface (M_0) :

$$F_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial\xi_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial\xi_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right),\qquad G_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial\eta_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial\eta_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right),$$

$$H_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial\zeta_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right);$$

$$I_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial p_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial p_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right),\qquad J_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial q_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right),$$

$$K_0'=\Delta_0\left(\frac{\partial W}{\partial r_1}\frac{d\rho_2}{ds_0}-\frac{\partial W}{\partial r_2}\frac{d\rho_1}{ds_0}\right),$$

les signes de $d\rho_1$ et $d\rho_2$ étant précisés par le sens de parcours indiqué plus haut de l'intégrale curviligne, ou encore les valeurs de $d\rho_1$ et $d\rho_2$ étant celles que l'on vient d'indiquer et où figure la normale extérieure au contour C_0 située dans le plan tangent de (M_0). Posons en outre :

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\right)+q_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\right]=X_0',$$

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\right)+r_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}-p_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\right]=Y_0'$$

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\right)+p_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}-q_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\right]=Z_0'$$

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial p_i}\right)+q_i\frac{\partial W}{\partial r_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial q_i}+\eta_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\right]=L_0'$$

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)+r_i\frac{\partial W}{\partial p_i}-p_i\frac{\partial W}{\partial r_i}+\zeta_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}-\xi_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\right]=M_0'$$

$$\sum_i\left[\frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial}{\partial\rho_i}\left(\Delta_0\frac{\partial W}{\partial r_i}\right)+p_i\frac{\partial W}{\partial q_i}-q_i\frac{\partial W}{\partial p_i}+\xi_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}-\eta_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\right]=N_0',$$

(1) On a naturellement des formules analogues en introduisant les cosinus directeurs λ', μ', ν', par rapport au trièdre $Mx'y'z'$, de la normale extérieure au contour C qui correspond à C_0.

nous aurons :

$$\delta \iint_{C_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = \int_{C_0} (F_0'\delta' x + G_0'\delta' y + H_0'\delta' z + I_0'\delta\imath' + J_0'\delta\jmath' + K_0'\delta\kappa') ds_0$$

$$- \iint_{C_0} (X_0'\delta' x + Y_0'\delta' y + Z_0'\delta' z + L_0'\delta\imath' + M_0'\delta\jmath' + N_0'\delta\kappa')\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2.$$

En ayant d'abord égard à l'intégrale double qui figure dans l'expression de $\delta \iint_{C_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$, nous appellerons *force extérieure et moment extérieur au point* M, *rapportés à l'unité d'aire de la surface non déformée*, les segments ayant leur origine en M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement X_0', Y_0', Z_0' et L_0', M_0', N_0'. En ayant ensuite égard à l'intégrale curviligne qui figure dans $\delta \iint_{C_0} W\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2$, nous appellerons *effort extérieur et moment de déformation extérieur au point* M *du contour* C *de la surface déformée, rapportés à l'unité de longueur du contour* C_0, les segments issus de ce point M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$, et $-I_0'$, $-J_0'$, $-K_0'$.

Ces six dernières quantités, en un point déterminé M de C, ne dépendent comme on l'a vu, que de la direction de la normale extérieure à la courbe C_0 menée au point M_0 dans le plan tangent de (M_0) : elles restent invariables, si, la région considérée de (M_0) variant, cette direction de la normale extérieure ne change pas, et elles changent de signe si cette direction est remplacée par la direction opposée.

Supposons que, à l'intérieur de la surface déformée limitée par le contour C, on trace une ligne Σ circonscrivant, soit seule, soit avec une portion du contour C, une partie (A) de la surface, et désignons par (B) ce qui reste de la surface en dehors de la partie (A). Soit Σ_0 la courbe de (M_0) qui correspond à la courbe Σ de (M), et soient (A_0) et (B_0) les régions de (M_0) qui correspondent aux régions (A) et (B) de (M). Séparons par la pensée les deux parties (A) et (B) ; on pourra regarder les deux segments $(-F_0', -G_0', -H_0')$ et $(-I_0', -J_0', -K_0')$, déterminés pour le point M et pour la direction de la normale menée à Σ_0 dans le plan tangent de (M_0) et à l'extérieur de (A_0), comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M du contour Σ de la région (A) ; on pourra regarder de même les deux segments (F_0', G_0', H_0') et (I_0', J_0', K_0') comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M du contour Σ de la région (B). En raison de cette remarque, nous dirons que $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$ et $-I_0'$, $-J_0'$, $-K_0'$ sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation exercés en* M *sur la portion* (A) *de la surface* (M), et que F_0', G_0', H_0', I_0', J_0', K_0' sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation exercés en* M *sur la portion* (B) *de la surface* (M).

L'observation présentée à la fin du § 9, au sujet du remplacement du trièdre $Mx'y'z'$ par un trièdre qui lui est invariablement lié, se répète ici sans modification.

35. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation. — Posons :

$$A_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_i}, \quad B_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_i}, \quad C_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_i},$$

$$P_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad Q_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad R_i' = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial r_i};$$

$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} A_1'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} B_1'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} C_1'$ et $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} P_1'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} Q_1'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}_0}} R_1'$ représentent respectivement les projections sur Mx', My', Mz' de l'effort et du moment de déformation, qui s'exercent au point M sur une courbe qui admet même tangente que $\rho_1 = const.$; cet effort et ce moment de déformation sont *rapportés à l'unité de longueur du contour non déformé*. A l'égard de $\rho_2 = const.$, l'effort et le moment de déformation ont respectivement pour projections $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} A_2'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} B_2'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} C_2'$ et $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} P_2'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} Q_2'$, $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} R_2'$.

Les nouveaux efforts et les nouveaux moments de déformation que nous venons de définir sont liés aux éléments introduits dans le § précédent par les relations suivantes :

$$\sum_i \left(\frac{\partial A_i'}{\partial \rho_i} + q_i C_i' - r_i B_i' \right) = \Delta_0 X_0', \qquad F_0' = A_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial B_i'}{\partial \rho_i} + r_i A_i' - p_i C_i' \right) = \Delta_0 Y_0', \qquad G_0' = B_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial C_i'}{\partial \rho_i} + p_i B_i' - q_i A_i' \right) = \Delta_0 Z_0', \qquad H_0' = C_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial P_i'}{\partial \rho_i} + q_i R_i' - r_i Q_i' + \eta_i C_i' - \zeta_i B_i' \right) = \Delta_0 L_0', \qquad I_0' = P_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - P_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial Q_i'}{\partial \rho_i} + r_i P_i' - p_i R_i' + \zeta_i A_i' - \xi_i C_i' \right) = \Delta_0 M_0', \qquad J_0' = Q_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - Q_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial R_i'}{\partial \rho_i} + p_i Q_i' - q_i P_i' + \xi_i B_i' - \eta_i A_i' \right) = \Delta_0 N_0', \qquad K_0' = R_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - R_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

où, si l'on veut, $d\rho_1$ et $d\rho_2$ sont à remplacer, dans les équations de droite, par les valeurs (39).

On peut se proposer de transformer les relations que nous venons d'écrire, indépendamment des valeurs, calculées au moyen de W, des quantités qui y figurent. Ces relations ont lieu en effet entre des segments attachés au point M et auxquels nous avons attribué des noms ; au lieu de définir ces segments par leurs projections sur Mx', My', Mz', nous pouvons tout aussi bien les définir par leurs projections sur d'autres axes : ces dernières projections seront liées par des relations, transformées des précédentes.

Les relations transformées s'obtiendront d'ailleurs immédiatement, si l'on

remarque que les formules primitives ont des interprétations simples et immédiates (1), par l'adjonction aux axes mobiles des axes qui leur sont menés parallèlement par le point O.

1. Considérons d'abord les axes fixes Ox, Oy, Oz; désignons respectivement par X_0, Y_0, Z_0 et par L_0, M_0, N_0 les projections sur ces axes de la force extérieure et du moment extérieur en un point quelconque M du milieu déformé; par F_0, G_0, H_0 et par I_0, J_0, K_0 les projections de l'effort et du moment de déformation qui sont relatifs à la direction $(d\rho_1, d\rho_2)$ de la tangente d'une courbe C, qui sont rapportés à l'unité de longueur de la courbe non déformée C_0, et qui ont été définis précédemment; par A_i, B_i, C_i et par P_i, Q_i, R_i les projections de l'effort (A_i', B_i', C_i') et du moment de déformation (P_i', Q_i', R_i'). Les transformées des relations précédentes sont évidemment :

$$\frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 X_0, \qquad F_0 = A_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial B_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 Y_0, \qquad G_0 = B_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial C_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 Z_0, \qquad H_0 = C_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \rho_2} + C_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial \rho_2} - B_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} - B_2 \frac{\partial z}{\partial \rho_2} = \Delta_0 L_0, \qquad I_0 = P_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - P_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho_2} + A_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial \rho_2} - C_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} - C_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} = \Delta_0 M_0, \qquad J_0 = Q_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - Q_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} + B_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + B_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} - A_1 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} - A_2 \frac{\partial y}{\partial \rho_2} = \Delta_0 N_0, \qquad K_0 = R_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - R_2 \frac{d\rho_1}{ds_0};$$

$\frac{d\rho_1}{ds_0}$ et $\frac{d\rho_2}{ds_0}$ doivent être remplacés respectivement par

$$-\frac{1}{\Delta_0}\left(\lambda_0 \frac{\partial x_0}{\partial \rho_2} + \mu_0 \frac{\partial y_0}{\partial \rho_2} + \nu_0 \frac{\partial z_0}{\partial \rho_2}\right), \qquad \frac{1}{\Delta_0}\left(\lambda_0 \frac{\partial x_0}{\partial \rho_1} + \mu_0 \frac{\partial y_0}{\partial \rho_1} + \nu_0 \frac{\partial z_0}{\partial \rho_1}\right),$$

et $\frac{d\rho_1}{ds}$, $\frac{d\rho_2}{ds}$ par

$$-\frac{1}{\Delta}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mu \frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \nu \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right), \qquad \frac{1}{\Delta}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \mu \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \nu \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right),$$

en désignant par λ_0, μ_0, ν_0 les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes, de la normale extérieure à C_0, et par λ, μ, ν ceux de la normale extérieure à C.

Ces équations donnent, en particulier, les équations relatives à la *déformation infiniment petite d'une surface plane* dont se sont servis Lord Kelvin et Tait (2).

2. On peut donner aux équations relatives aux axes fixes Ox, Oy, Oz une

(1) Une interprétation intéressante à noter est l'analogue de celle donnée par Varignon à propos de la statique et par P. Saint-Guilhem à propos de la dynamique.

(2) *Treatise on Natural Philosophy*, vol. I, Part. II, § **644**, p. 186-188.

nouvelle forme. Nous pouvons exprimer les neuf cosinus α, α',... γ'' au moyen de trois auxiliaires; soient λ_1, λ_2, λ_3 trois telles auxiliaires. Posons :

$$\sum \gamma d\beta = -\sum \beta d\gamma = \varpi_1' d\lambda_1 + \varpi_2' d\lambda_2 + \varpi_3' d\lambda_3,$$
$$\sum \alpha d\gamma = -\sum \gamma d\alpha = \chi_1' d\lambda_1 + \chi_2' d\lambda_2 + \chi_3' d\lambda_3,$$
$$\sum \beta d\alpha = -\sum \alpha d\beta = \sigma_1' d\lambda_1 + \sigma_2' d\lambda_2 + \sigma_3' d\lambda_3.$$

Les fonctions ϖ_i', χ_i', σ_i' de λ_1, λ_2, λ_3 ainsi définies satisfont aux relations :

$$\frac{\partial \varpi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i'}{\partial \lambda_j} + \chi_i' \sigma_j' - \chi_j' \sigma_i' = 0,$$
$$\frac{\partial \chi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i'}{\partial \lambda_j} + \sigma_i' \varpi_j' - \sigma_j' \varpi_i' = 0, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$
$$\frac{\partial \sigma_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i'}{\partial \lambda_j} + \varpi_i' \chi_j' - \varpi_j' \chi_i' = 0,$$

et l'on a :

$$p_i = \varpi_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \varpi_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \varpi_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i},$$
$$q_i = \chi_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \chi_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \chi_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i},$$
$$r_i = \sigma_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \sigma_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \sigma_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}.$$

Désignons par ϖ_i, χ_i, σ_i les projections, sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, du segment dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont ϖ_i', χ_i', σ_i' ; nous aurons :

$$\sum \alpha' d\alpha'' = -\sum \alpha'' d\alpha' = \varpi_1 d\lambda_1 + \varpi_2 d\lambda_2 + \varpi_3 d\lambda_3,$$
$$\sum \alpha'' d\alpha = -\sum \alpha d\alpha'' = \chi_1 d\lambda_1 + \chi_2 d\lambda_2 + \chi_3 d\lambda_3,$$
$$\sum \alpha d\alpha' = -\sum \alpha' d\alpha = \sigma_1 d\lambda_1 + \sigma_2 d\lambda_2 + \sigma_3 d\lambda_3.$$

en vertu desquelles (1) les nouvelles fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i de λ_1, λ_2, λ_3 satisfont aux relations :

$$\frac{\partial \varpi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i}{\partial \lambda_j} = \chi_i \sigma_j - \chi_j \sigma_i,$$
$$\frac{\partial \chi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i}{\partial \lambda_j} = \sigma_i \varpi_j - \sigma_j \varpi_i, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$
$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} = \varpi_i \chi_j - \varpi_j \chi_i.$$

(1) Ces formules peuvent servir de définition directe aux fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i et être substituées à

$$\varpi_i = \alpha \varpi_i' + \beta \chi_i' + \gamma \sigma_i'$$
$$\chi_i = \alpha' \varpi_i' + \beta' \chi_i' + \gamma' \sigma_i' \quad (i = 1, 2, 3)$$
$$\sigma_i = \alpha'' \varpi_i' + \beta'' \chi_i' + \gamma'' \sigma_i'.$$

Nous ferons encore la remarque, qui nous servira plus loin, que si l'on désigne par $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ les variations de λ_1, λ_2, λ_3, qui correspondent aux variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$,... $\delta\gamma''$ de α, α',... γ'', on aura :

$$\begin{aligned}
\delta\mathrm{I}' &= \varpi_1'\delta\lambda_1 + \varpi_2'\delta\lambda_2 + \varpi_3'\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{J}' &= \chi_1'\delta\lambda_1 + \chi_2'\delta\lambda_2 + \chi_3'\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{K}' &= \sigma_1'\delta\lambda_1 + \sigma_2'\delta\lambda_2 + \sigma_3'\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{I} &= \alpha\delta\mathrm{I}' + \beta\delta\mathrm{J}' + \gamma\delta\mathrm{K}' = \varpi_1\delta\lambda_1 + \varpi_2\delta\lambda_2 + \varpi_3\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{J} &= \alpha'\delta\mathrm{I}' + \beta'\delta\mathrm{J}' + \gamma'\delta\mathrm{K}' = \chi_1\delta\lambda_1 + \chi_2\delta\lambda_2 + \chi_3\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{K} &= \alpha''\delta\mathrm{I}' + \beta''\delta\mathrm{J}' + \gamma''\delta\mathrm{K}' = \sigma_1\delta\lambda_1 + \sigma_2\delta\lambda_2 + \sigma_3\delta\lambda_3,
\end{aligned}$$

où $\delta\mathrm{I}$, $\delta\mathrm{J}$, $\delta\mathrm{K}$ sont les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz' sont $\delta\mathrm{I}'$, $\delta\mathrm{J}'$, $\delta\mathrm{K}'$.

Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_0 &= \varpi_1'\mathrm{I}_0' + \chi_1'\mathrm{J}_0' + \sigma_1'\mathrm{K}_0' = \varpi_1\mathrm{I}_0 + \chi_1\mathrm{J}_0 + \sigma_1\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{J}_0 &= \varpi_2'\mathrm{I}_0' + \chi_2'\mathrm{J}_0' + \sigma_2'\mathrm{K}_0' = \varpi_2\mathrm{I}_0 + \chi_2\mathrm{J}_0 + \sigma_2\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{K}_0 &= \varpi_3'\mathrm{I}_0' + \chi_3'\mathrm{J}_0' + \sigma_3'\mathrm{K}_0' = \varpi_3\mathrm{I}_0 + \chi_3\mathrm{J}_0 + \sigma_3\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{L}_0 &= \varpi_1'\mathrm{L}_0' + \chi_1'\mathrm{M}_0' + \sigma_1'\mathrm{N}_0' = \varpi_1\mathrm{L}_0 + \chi_1\mathrm{M}_0 + \sigma_1\mathrm{N}_0,\\
\mathfrak{M}_0 &= \varpi_2'\mathrm{L}_0' + \chi_2'\mathrm{M}_0' + \sigma_2'\mathrm{N}_0' = \varpi_2\mathrm{L}_0 + \chi_2\mathrm{M}_0 + \sigma_2\mathrm{N}_0,\\
\mathfrak{N}_0 &= \varpi_3'\mathrm{L}_0' + \chi_3'\mathrm{M}_0' + \sigma_3'\mathrm{N}_0' = \varpi_3\mathrm{L}_0 + \chi_3\mathrm{M}_0 + \sigma_3\mathrm{N}_0.
\end{aligned}$$

Introduisons en outre les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= \varpi_1'\mathrm{P}_i' + \chi_1'\mathrm{Q}_i' + \sigma_1'\mathrm{R}_i' = \varpi_1\mathrm{P}_i + \chi_1\mathrm{Q}_i + \sigma_1\mathrm{R}_i,\\
\mathrm{X}_i &= \varpi_2'\mathrm{P}_i' + \chi_2'\mathrm{Q}_i' + \sigma_2'\mathrm{R}_i' = \varpi_2\mathrm{P}_i + \chi_2\mathrm{Q}_i + \sigma_2\mathrm{R}_i,\\
\Sigma_i &= \varpi_3'\mathrm{P}_i' + \chi_3'\mathrm{Q}_i' + \sigma_3'\mathrm{R}_i' = \varpi_3\mathrm{P}_i + \chi_3\mathrm{Q}_i + \sigma_3\mathrm{R}_i;
\end{aligned}$$

nous avons, à la place du dernier système où figurent soit P_i', Q_i', R_i'. soit P_i, Q_i, R_i, le suivant :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_0 = \sum_i \Big[&\frac{\partial\Pi_i}{\partial\rho_i} - \mathrm{A}_i'(\sigma_1'\eta_i - \chi_1'\zeta_i) - \mathrm{B}_i'(\varpi_1'\zeta_i - \sigma_1'\xi_i) - \mathrm{C}_i'(\chi_1'\xi_i - \varpi_1'\eta_i)\\
&- \mathrm{P}_i'\Big(\frac{\partial\varpi_1'}{\partial\rho_i} + q_i\sigma_1' - r_i\chi_1'\Big) - \mathrm{Q}_i'\Big(\frac{\partial\chi_1'}{\partial\rho_i} + r_i\varpi_1' - p_i\sigma_1'\Big)\\
&- \mathrm{R}_i'\Big(\frac{\partial\sigma_1'}{\partial\rho_i} + p_i\chi_1' - q_i\varpi_1'\Big)\Big]
\end{aligned}$$

avec deux équations analogues. Si l'on remarque que les fonctions ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i de λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{\partial\lambda_1}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_2}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_3}{\partial\rho_i}$ donnent lieu aux formules ;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\xi_i}{\partial\lambda_j} + \chi_j'\zeta_i - \sigma_j'\eta_i &= 0, & \frac{\partial p_i}{\partial\lambda_j} &= \frac{\partial\varpi_j'}{\partial\rho_i} + q_i\sigma_j' - r_i\chi_j',\\
\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda_j} + \sigma_j'\xi_i - \varpi_j'\zeta_i &= 0, & \frac{\partial q_i}{\partial\lambda_j} &= \frac{\partial\chi_j'}{\partial\rho_i} + r_i\varpi_j' - p_i\sigma_j',\\
\frac{\partial\zeta_i}{\partial\lambda_j} + \varpi_j'\eta_i - \chi_j'\xi_i &= 0, & \frac{\partial r_i}{\partial\lambda_j} &= \frac{\partial\sigma_j'}{\partial\sigma_i} + p_i\chi_j' - q_i\varpi_j',
\end{aligned}$$

qui résultent des relations de définition des fonctions ϖ_i', χ_i', σ_i' et des neuf identités qu'elles vérifient, on peut donner au système précédent la nouvelle forme :

$$\mathfrak{L}_0 = \sum_i \left[\frac{\partial \Pi_i}{\partial \rho_i} - A_i' \frac{\partial \xi_i}{\partial \lambda_1} - B_i' \frac{\partial \eta_i}{\partial \lambda_1} - C_i' \frac{\partial \zeta_i}{\partial \lambda_1} - P_i' \frac{\partial p_i}{\partial \lambda_1} - Q_i' \frac{\partial q_i}{\partial \lambda_1} - R_i' \frac{\partial r_i}{\partial \lambda_1} \right],$$

avec deux équations analogues.

3. Au lieu de rapporter aux axes fixes Ox, Oy, Oz les éléments relatifs au point M, envisageons, pour définir ces éléments, un trièdre trirectangle $Mx_1'y_1'z_1'$ mobile avec M et dont l'axe Mz_1', est normal à la surface (M) en M. Pour définir ce trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$, rapportons-le au trièdre $Mx'y'z'$, et soient, par rapport aux axes de ce dernier, l, l', l'' les cosinus directeurs de Mx_1', m, m', m'' ceux de My_1', et n, n', n'' ceux de Mz_1'.

Nous définirons d'une façon précise les cosinus n, n', n'' par les formules :

$$n = \frac{1}{\Delta}(\eta_1\zeta_2 - \eta_1\xi_2), \qquad n' = \frac{1}{\Delta}(\zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1), \qquad n'' = \frac{1}{\Delta}(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1).$$

Nous admettrons que le trièdre $Mx_i'y_i'z_i'$ a même disposition que les autres, et nous ne ferons pas pour le moment d'hypothèse particulière sur les autres cosinus.

Désignons alors par $\xi_i^{(1)}$, $\eta_i^{(1)}$, $\zeta_i^{(1)}$ les composantes de la vitesse de l'origine M des axes Mx_i', My_i', Mz_i' suivant ces axes, quand ρ_i varie seul et joue le rôle du temps ; soient également $p_i^{(1)}$, $q_i^{(1)}$, $r_i^{(1)}$ les projections sur ces mêmes axes de la rotation instantanée du trièdre $Mx_i'y'z_i'$ relative au paramètre ρ_i ; dans ces dernières définitions, le trièdre $Mx_i'y_i'z_i'$ est naturellement rapporté au trièdre fixe $Oxyz$. Nous aurons :

$$\xi_i^{(1)} = l\xi_i + l'\eta_i + l''\zeta_i, \quad \eta_i^{(1)} = m\xi_i + m'\eta_i + m''\zeta_i, \quad \zeta_i^{(1)} = n\xi_i + n'\eta_i + n''\zeta_i = 0,$$

et trois formules telles que la suivante :

$$p_i^{(1)} = lp_i + l'q_i + l''r_i + \sum n \frac{\partial m}{\partial \rho_i},$$

les trièdres considérés ayant même disposition.

Désignons respectivement par X_0'', Y_0'', Z_0'' et par L_0'', M_0'', N_0'' les projections sur Mx_1', My_1', Mz_1', de la force extérieure et du moment extérieur en un point quelconque M de la surface déformée, rapportés à l'unité de surface de la surface non déformée, par F_0'', G_0'', H_0'' et par l_0'', J_0'', K_0'' les projections sur les mêmes axes de l'effort (F_0, G_0, H_0) et du moment (I_0, J_0. K_0), par A_i'', B_i'', C_i'' et par P_i'', Q_i'', R_i'' les projections de l'effort (A_i', B_i', C_i') et du moment (P_i', Q_i', R_i') précédemment définis.

Les transformées des relations précédentes (ou des relations primitives) sont évidemment (1) :

$$(40)\quad \begin{cases} \sum_i \left(\frac{\partial A_i''}{\partial \rho_i} + q_i^{(1)} C_i'' - r_i^{(1)} B_i''\right) = \Delta_0 X_0'', & F_0'' = A_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \\ \sum_i \left(\frac{\partial B_i''}{\partial \rho_i} + r_i^{(1)} A_i'' - p_i^{(1)} C_i''\right) = \Delta_0 Y_0'', & G_0'' = B_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \\ \sum_i \left(\frac{\partial C_i''}{\partial \rho_i} + p_i^{(1)} B_i'' - q_i^{(1)} A_i''\right) = \Delta_0 Z_0'', & H_0'' = C_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \\ \sum_i \left(\frac{\partial P_i''}{\partial \rho_i} + q_i^{(1)} R_i'' - r_i^{(1)} Q_i'' + \eta_i^{(1)} C_i''\right) = \Delta_0 L_0'', & I_0'' = P_0'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - P_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \\ \sum_i \left(\frac{\partial Q_i''}{\partial \rho_i} + r_i^{(1)} P_i'' - p_i^{(1)} R_i'' - \xi_i^{(1)} C_i''\right) = \Delta_0 M_0'', & J_0'' = Q_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - Q_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \\ \sum_i \left(\frac{\partial R_i''}{\partial \rho_i} + p_i^{(1)} Q_i'' - q_i^{(1)} P_i'' + \xi_i^{(1)} B_i'' - \eta_i^{(1)} A_i''\right) = \Delta_0 N_0'' & K_0'' = R_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - R_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0}. \end{cases}$$

Au lieu de remplacer, dans les équations de droite, $d\rho_1$, $d\rho_2$ par les valeurs (39), ou par les analogues relatives à (M), nous pouvons, en désignant par (λ'', μ'', o) les cosinus directeurs, par rapport au trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$, de la normale extérieure au contour C, prendre les valeurs suivantes :

$$-(\lambda''\xi_2^{(1)} + \mu''\eta_2^{(1)})\frac{ds}{\Delta}, \qquad (\lambda''\xi_1^{(1)} + \mu''\eta_1^{(1)})\frac{ds}{\Delta};$$

nous obtenons ainsi :

$$(41)\quad \begin{cases} F_0'' \frac{ds_0}{ds} = \lambda'' \frac{\xi_1^{(1)} A_1'' + \xi_2^{(1)} A_2''}{\Delta} + \mu'' \frac{\eta_1^{(1)} A_1'' + \eta_2^{(1)} A_2''}{\Delta}, \\ I_0'' \frac{ds_0}{ds} = \lambda'' \frac{\xi_1^{(1)} P_1'' + \xi_2^{(1)} P_2''}{\Delta} + \mu'' \frac{\eta_1^{(1)} P_1'' + \eta_2^{(1)} P_2''}{\Delta}, \end{cases}$$

et deux systèmes de deux formules analogues.

Ces formules conduisent à substituer aux douze auxiliaires A_i'', B_i'', C_i'', P_i'', Q_i''. R_i'', douze nouvelles auxiliaires qui seront les coefficients de λ'' et μ'', dans les expressions précédentes des efforts et moments rapportés à l'unité de longueur de C, ou qui seront liés à ces coefficients d'une façon simple. Nous poserons :

$$\frac{\xi_1^{(1)} A_1'' + \xi_2^{(1)} A_2''}{\Delta} = N_1, \qquad \frac{\eta_1^{(1)} A_1'' + \eta_2^{(1)} A_2''}{\Delta} = T - S_3,$$

$$\frac{\xi_1^{(1)} B_1'' + \xi_2^{(1)} B_2''}{\Delta} = T + S_3, \qquad \frac{\eta_1^{(1)} B_1'' + \eta_2^{(1)} B_2''}{\Delta} = N_2$$

$$\frac{\xi_1^{(1)} C_1'' + \xi_2^{(1)} C_2''}{\Delta} = S_2, \qquad \frac{\eta_1^{(1)} C_1'' + \eta_2^{(1)} C_2''}{\Delta} = S_1,$$

(1) Il suffit de remplacer ξ_i, ... A_i', ... par $\xi_i^{(1)}$, ... A_i'', ... et de tenir compte des hypothèses $\zeta_i^{(1)} = 0$; pour un trièdre *quelconque* de sommet M, on aurait les mêmes calculs.

en introduisant six premières auxiliaires N_1, N_2, T, S_1, S_2, S_3, et de même

$$\frac{\xi_1^{(1)}P_1'' + \xi_2^{(1)}P_2''}{\Delta} = \mathfrak{N}_1, \qquad \frac{\tau_1^{(1)}P_1'' + \tau_2^{(1)}P_2''}{\Delta} = \mathfrak{C} - \mathfrak{S}_3,$$

$$\frac{\xi_1^{(1)}Q_1'' + \xi_2^{(1)}Q_2''}{\Delta} = \mathfrak{C} + \mathfrak{S}_3, \qquad \frac{\tau_1^{(1)}Q_1'' + \tau_2^{(1)}Q_2''}{\Delta} = \mathfrak{N}_2,$$

$$\frac{\xi_1^{(1)}R_1'' + \xi_2^{(1)}R_2''}{\Delta} = \mathfrak{S}_2, \qquad \frac{\tau_1^{(1)}R_1'' + \tau_2^{(1)}R_2''}{\Delta} = \mathfrak{S}_1,$$

en introduisant six autres auxiliaires $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$.

Les douze équations que nous venons d'écrire peuvent être résolues immédiatement par rapport aux auxiliaires primitives A_i'', B_i'', C_i'', P_i'', Q_i'', R_i''. Observons que, en vertu de l'hypothèse faite sur la disposition commune de tous les trièdres, on a :

$$\begin{vmatrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{vmatrix} = 1 ;$$

les formules qui définissent $\xi_i^{(1)}$, $\eta_i^{(1)}$ donnent, en conséquence,

$$\xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)} - \xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)} = \Delta.$$

Il vient par suite

$$A_1'' = N_1\eta^{(1)} - (T - S_3)\xi_2^{(1)}, \qquad A_2'' = (T - S_3)\xi_1^{(1)} - N_1\eta_1^{(1)},$$
$$B_1'' = (T + S_3)\eta_2^{(1)} - N_2\xi_2^{(1)}, \qquad B_2'' = N_2\xi_1^{(1)} - (T + S_3)\eta_1^{(1)},$$
$$C_1'' = S_2\eta_2^{(1)} - S_1\xi_2^{(1)}, \qquad C_2'' = S_1\xi_1^{(1)} - S_2\eta_1^{(1)},$$

et six formules analogues pour P_i'', Q_i'', R_i'', avec des lettres en italique dans les seconds membres. En portant ces valeurs dans les relations (40) et (41), on aura les équations relatives aux efforts et moments de déformation et aux forces et moments extérieurs, sous la forme qu'elles prennent avec les nouvelles auxiliaires [1].

On peut évidemment donner aux composantes de l'effort et du moment de déformation des désignations analogues à celles qui sont en usage pour la ligne déformable. Ainsi, on peut appeler les composantes N_1, N_2 de l'effort des *efforts de tension* ; les composantes $T - S_3$, $T + S_3$ sont des *efforts tranchants* dans le plan tangent à la surface déformée ; les composantes S_1, S_2 sont des *efforts tranchants* normaux à la surface déformée. De même les composantes $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ du moment de déformation peuvent être regardées comme des *moments de torsion* ; les composantes $\mathfrak{C} - \mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{C} + \mathfrak{S}_3$ ont le caractère de *moments de flexion* ; les composantes $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ pourraient s'appeler *moments de flexion géodésique*.

36. Remarques relatives aux composantes S_1, S_2, S_3 et $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$. — A l'égard des expressions S_1, S_2, S_3, et des analogues $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, faisons explicitement la remarque suivante, que l'on a utilisée plus haut pour écrire les équations transformées.

[1] On remarquera que le coefficient de S_3 dans la troisième de ces équations est *nul*.

Soit, d'une façon générale, un segment dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont

$$\frac{\partial y}{\partial \rho_i} C_i - \frac{\partial z}{\partial \rho_i} B_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial \rho_i} A_i - \frac{\partial x}{\partial \rho_i} C_i, \qquad \frac{\partial x}{\partial \rho_i} B_i - \frac{\partial y}{\partial \rho_i} A_i ;$$

en envisageant ce segment comme le moment d'un vecteur (A_i, B_i, C_i) appliqué au point $\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\right)$, on voit que ses projections sur Mx', My', Mz' seront

$$\eta_i C_i' - \zeta_i B_i', \qquad \zeta_i A_i' - \xi_i C_i', \qquad \xi_i B_i' - \eta_i A_i',$$

et sur Mx_1', My_1', Mz_1',

$$\eta_i^{(1)} C_i'', \qquad -\xi_i^{(1)} C_i'', \qquad \xi_i^{(1)} B_i'' - \eta_i^{(1)} A_i''.$$

Il résulte de là, que le segment dont les projections sur Ox, Oy, Oz sont

$$\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_i} C_i - \frac{\partial z}{\partial \rho_i} B_i\right), \qquad \sum_i \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_i} A_i - \frac{\partial x}{\partial \rho_i} C_i\right), \qquad \sum_i \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_i} B_i - \frac{\partial y}{\partial \rho_i} A_i\right),$$

aura pour projections sur Mx', My', Mz',

$$\sum_i (\eta_i C_i' - \zeta_i B_i'), \qquad \sum_i (\zeta_i A_i' - \xi_i C_i'), \qquad \sum_i (\xi_i B_i' - \eta_i A_i'),$$

et sur Mx_1', My_1', Mz_1' :

$$\sum_i \eta_i^{(1)} C_i'' = \Delta S_1, \quad -\sum_i \xi_i^{(1)} C_i'' = -\Delta S_2, \quad \sum_i (\xi_i^{(1)} B_i'' - \eta_i^{(1)} A_i'') = 2\Delta S_3.$$

Une proposition identique a naturellement lieu pour les lettres en italique.

On en déduit que les conditions :

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0$$

reviennent aux suivantes :

$$\sum_i (\eta_i C_i' - \zeta_i B_i') = 0, \quad \sum_i (\zeta_i A_i' - \xi_i C_i') = 0, \quad \sum_i (\xi_i B_i' - \eta_i A_i') = 0,$$

et que les conditions :

$$\mathcal{G}_1 = 0, \qquad \mathcal{G}_2 = 0, \qquad \mathcal{G}_3 = 0$$

se ramènent à

$$\sum_i (\eta_i R_i' - \zeta_i Q_i') = 0, \quad \sum_i (\zeta_i P_i' - \xi_i R_i') = 0, \quad \sum_i (\xi_i Q_i' - \eta_i P_i') = 0.$$

On arrive, dans les deux cas, à un système de deux conditions qui ne dépend pas du choix du trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$.

Si les conditions $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ sont des *conditions qui résultent de la forme de* W, alors W vérifie les trois équations aux dérivées partielles :

$$\sum_i \left(\eta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\zeta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\xi_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right) = 0,$$

ce qui entraîne que W ne dépend de ξ_i, η_i, ζ_i que par l'intermédiaire des expressions

$$\mathcal{E} = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2, \quad \mathcal{F} = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2, \quad \mathcal{G} = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2.$$

Si les conditions $\mathcal{G}_1 = 0$, $\mathcal{G}_2 = 0$, $\mathcal{G}_3 = 0$ sont des *conditions qui résultent de la forme de* W, alors W vérifie les trois équations aux dérivées partielles :

$$\sum_i \left(r_i \frac{\partial W}{\partial r_i} - \zeta_i \frac{\partial W}{\partial q_i}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\zeta_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - \xi_i \frac{\partial W}{\partial r_i}\right) = 0, \quad \sum_i \left(\xi_i \frac{\partial W}{\partial q_i} - \eta_i \frac{\partial W}{\partial p_i}\right) = 0,$$

ce qui entraîne que W ne dépend de p_i, q_i, r_i que par l'intermédiaire des trois expressions :

$$p_1\xi_1 + q_1\eta_1 + r_1\zeta_1, \quad p_1\xi_2 + q_1\eta_2 + r_1\zeta_2 + p_2\xi_1 + q_2\eta_1 + r_2\zeta_1, \quad p_2\xi_2 + q_2\eta_2 + r_2\zeta_2,$$

expressions qui, lorsque $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$, se réduisent aux coefficients de dp_1^2, $dp_1 dp_2$ et de dp_2^2 dans l'équation des lignes de courbure de (M).

Observons encore que si l'on pose simplement les conditions

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0,$$

cela revient à dire que le segment, dont les projections sur Mx', My', Mz' ont les valeurs indiquées à la page précédente, est parallèle à Mz_1', ou qu'il est perpendiculaire à la fois aux deux vecteurs (ξ_1, η_1, ζ_1) et (ξ_2, η_2, ζ_2), ce qui donne les conditions :

$$\begin{aligned} &\xi_1(\eta_2 C_2' - \zeta_2 B_2') + \eta_1(\zeta_2 A_2' - \xi_2 C_2') + \zeta_1(\xi_2 B_2' - \eta_2 A_2') = 0, \\ &\xi_2(\eta_1 C_1' - \zeta_1 B_1') + \eta_2(\zeta_1 A_1' - \xi_1 C_1') + \zeta_2(\xi_1 B_1' - \eta_1 A_1') = 0, \end{aligned}$$

qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} &(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)A_2' + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)B_2' + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)C_2' = 0, \\ &(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)A_1' + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)B_1' + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)C_1' = 0, \end{aligned}$$

et, sous cette forme, expriment que les vecteurs (A_1', B_1', C_1') et (A_2', B_2', C_2') sont perpendiculaires à la normale Mz_1' ; on trouve ainsi *deux conditions qui sont indépendantes du choix du trièdre* $Mx_1'y_1'z_1'$, et que l'on vérifie immédiatement *a posteriori*, en se rapportant à la signification des efforts tranchants S_1, S_2. Si les conditions $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ sont des conditions *qui résultent de la forme de* W, alors W vérifie les deux équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} &(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)\frac{\partial W}{\partial \eta_1} + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)\frac{\partial W}{\partial \zeta_1} = 0, \\ &(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)\frac{\partial W}{\partial \xi_2} + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)\frac{\partial W}{\partial \eta_2} + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)\frac{\partial W}{\partial \zeta_2} = 0, \end{aligned}$$

ce qui entraîne que W est une fonction qui ne dépend de ξ_i, η_i, ζ_i que par l'intermédiaire des trois expressions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.

Le même raisonnement prouve que les conditions :

$$\mathcal{G}_1 = 0, \qquad \mathcal{G}_2 = 0$$

reviennent à deux conditions indépendantes du choix du trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$ que l'on peut écrire finalement

$$(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)P_1' + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)Q_1' + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)R_1' = 0,$$
$$(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)P_2' + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)Q_2' + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)R_2' = 0.$$

Si les conditions $\mathcal{G}_1 = 0$, $\mathcal{G}_2 = 0$ sont des conditions *qui résultent de la forme de* W, alors W vérifie les deux équations aux dérivées partielles :

$$(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)\frac{\partial W}{\partial p_1} + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)\frac{\partial W}{\partial q_1} + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)\frac{\partial W}{\partial r_1} = 0,$$
$$(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)\frac{\partial W}{\partial p_2} + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)\frac{\partial W}{\partial q_2} + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)\frac{\partial W}{\partial r_2} = 0,$$

ce qui entraîne que W est une fonction qui ne dépend de p_i, q_i, r_i que par l'intermédiaire des quatre expressions :

$$p_1\xi_1 + q_1\eta_1 + r_1\zeta_1,\ p_1\xi_2 + q_1\eta_2 + r_1\zeta_2,\ p_2\xi_1 + q_2\eta_1 + r_2\zeta_1,\ p_2\xi_2 + q_2\eta_2 + r_2\zeta_2.$$

Envisageons de même la condition

$$S_3 = 0;$$

elle exprime que le segment, dont les projections sur Mx', My', Mz' ont les valeurs indiquées à la page 1034, est perpendiculaire sur Mz_1', ce qui donne la condition :

$$(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2)\sum_i(\eta_iC_i' - \zeta_iB_i') + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2)\sum_i(\zeta_iA_i' - \xi_iC_i')$$
$$+ (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2)\sum_i(\xi_iB_i' - \eta_iA_i') = 0,$$

qui ne dépend pas du *choix du trièdre* $Mx_1'y_1'z_1'$, et qui conduit à une équation aux dérivées partielles vérifiée par W, lorsque la condition $S_3 = 0$ résulte de la forme de W ; cette équation est :

$$(\xi_2\mathcal{E} - \xi_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial\xi_1} + (\eta_2\mathcal{E} - \eta_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial\eta_1} + (\zeta_2\mathcal{E} - \zeta_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial\zeta_1}$$
$$+ (\xi_2\mathcal{F} - \xi_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial\xi_2} + (\eta_2\mathcal{F} - \eta_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial\eta_2} + (\zeta_2\mathcal{F} - \zeta_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial\zeta_2} = 0,$$

qui s'intègre facilement, car elle admet les intégrales particulières formées respectivement par $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.

Le même raisonnement s'applique à la condition

$$\mathcal{G}_3 = 0,$$

qui correspond encore à une *condition indépendante du choix du trièdre* $Mx_1'y_1'z_1'$, et qui conduit, lorsqu'elle résulte de la forme de W, à l'équation aux dérivées partielles

$$(\xi_2\mathcal{E} - \xi_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial p_1} + (\eta_2\mathcal{E} - \eta_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial q_1} + (\zeta_2\mathcal{E} - \zeta_1\mathcal{F})\frac{\partial W}{\partial r_1}$$
$$+ (\xi_2\mathcal{F} - \xi_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial p_2} + (\eta_2\mathcal{F} - \eta_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial q_2} + (\zeta_2\mathcal{F} - \zeta_1\mathcal{G})\frac{\partial W}{\partial r_2} = 0,$$

dont l'intégration est immédiate.

37. Equations obtenues en introduisant, à l'exemple de Poisson, les coordonnées x, y comme variables indépendantes à la place de ρ_1, ρ_2. — Proposons-nous, en poursuivant une certaine analogie avec ce que nous ferons pour le milieu déformable à trois dimensions, de former des équations analogues à celles du § **35**, mais dans lesquelles les variables indépendantes seront x, y.

Pour abréger l'écriture, désignons pour un instant par $\mathcal{X}_0'$, $\mathcal{Y}_0'$, $\mathcal{Z}_0'$, $\mathcal{L}_0'$, $\mathcal{M}_0'$, $\mathcal{N}_0'$ les premiers membres des relations à transformer, c'est-à-dire posons :

$$\mathcal{X}_0' = \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \rho_2} - \Delta_0 X_0, \quad \mathcal{Y}_0' = \frac{\partial B_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial B_2}{\partial \rho_2} - \Delta_0 Y_0, \quad \mathcal{Z}_0' = \frac{\partial C_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial C_2}{\partial \rho_2} - \Delta_0 Z_0,$$

et

$$\mathcal{L}_0' = \frac{\partial P_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \rho_2} + C_1\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + C_2\frac{\partial y}{\partial \rho_2} - B_1\frac{\partial z}{\partial \rho_1} - B_2\frac{\partial z}{\partial \rho_2} - \Delta_0 L_0,$$
$$\mathcal{M}_0' = \frac{\partial Q_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \rho_2} + A_1\frac{\partial z}{\partial \rho_1} + A_2\frac{\partial z}{\partial \rho_2} - C_1\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - C_2\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \Delta_0 M_0,$$
$$\mathcal{N}_0' = \frac{\partial R_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial R_2}{\partial \rho_2} + B_1\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + B_2\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - A_1\frac{\partial y}{\partial \rho_1} - A_2\frac{\partial y}{\partial \rho_2} - \Delta_0 N_0.$$

Nous pouvons résumer les douze relations du § **35**, dans lesquelles on a rapporté les éléments aux axes fixes, dans la suivante :

$$0 = \iint (\mathcal{X}_0'\lambda_1 + \mathcal{Y}_0'\lambda_2 + \mathcal{Z}_0'\lambda_3 + \mathcal{L}_0'\mu_1 + \mathcal{M}_0'\mu_2 + \mathcal{N}_0'\mu_3)\, d\rho_1 d\rho_2$$
$$+ \int \Big\{ \Big(F_0 - A_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + A_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\lambda_1 + \Big(G_0 - B_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + B_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\lambda_2$$
$$+ \Big(H_0 - C_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + C_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\lambda_3 + \Big(I_0 - P_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + P_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\mu_1$$
$$+ \Big(J_0 - Q_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + Q_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\mu_2 + \Big(K_0 - R_1\frac{d\rho_2}{ds_0} + R_2\frac{d\rho_1}{ds_0}\Big)\mu_3 \Big\}\, ds_0$$

où λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 sont des fonctions arbitraires et où les intégrales sont relatives à la courbe C_0 de la surface (M_0) et au domaine limité par elle.

Apliquant la formule de GREEN, la relation que nous venons d'écrire devient la suivante :

$$
\begin{aligned}
&-\iint (X_0\lambda_1 + Y_0\lambda_2 + Z_0\lambda_3 + L_0\mu_1 + M_0\mu_2 + N_0\mu_3)\,\Delta_0\, d\rho_1\, d\rho_2 \\
&+\int (F_0\lambda_1 + G_0\lambda_2 + H_0\lambda_3 + I_0\mu_1 + J_0\mu_2 + K_0\mu_3)\, ds_0 \\
&-\iint \left(A_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial\rho_1} + A_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\rho_2} + B_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial\rho_1} + B_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial\rho_2} + C_1\frac{\partial\lambda_3}{\partial\rho_1} + C_2\frac{\partial\lambda_3}{\partial\rho_2}\right) d\rho_1 d\rho_2 \\
&-\iint \left(P_1\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_1} + P_2\frac{\partial\mu_1}{\partial\rho_2} + Q_1\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_1} + Q_2\frac{\partial\mu_2}{\partial\rho_2} + R_1\frac{\partial\mu_3}{\partial\rho_1} + R_2\frac{\partial\mu_3}{\partial\rho_2}\right) d\rho_1 d\rho_2 \\
&+\iint \left(\frac{\partial y}{\partial\rho_1}C_1 + \frac{\partial y}{\partial\rho_2}C_2 - \frac{\partial z}{\partial\rho_1}B_1 - \frac{\partial z}{\partial\rho_2}B_2\right)\mu_1\, d\rho_1\, d\rho_2 \\
&+\iint \left(\frac{\partial z}{\partial\rho_1}A_1 + \frac{\partial z}{\partial\rho_2}A_2 - \frac{\partial x}{\partial\rho_1}C_1 - \frac{\partial x}{\partial\rho_2}C_2\right)\mu_2\, d\rho_1\, d\rho_2 \\
&+\iint \left(\frac{\partial x}{\partial\rho_1}B_1 + \frac{\partial x}{\partial\rho_2}B_2 - \frac{\partial y}{\partial\rho_1}A_1 - \frac{\partial y}{\partial\rho_2}A_2\right)\mu_3\, d\rho_1\, d\rho_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Cherchons la transformée de cette dernière relation, lorsqu'on prend pour nouvelles variables les fonctions x, y de ρ_1, ρ_2. Si l'on désigne par φ une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2, qui devient une fonction de x, y, les formules élémentaires du changement de variables sont :

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho_1}, \\
\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\rho_2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\rho_2},
\end{aligned}
$$

Appliquons ces formules aux fonctions λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 ; C indiquant toujours la courbe de (M) qui correspond à la courbe (C_0) de (M_0), désignons de plus par X, Y, Z, L, M, N les projections sur Ox, Oy, Oz de la force et du moment extérieurs appliqués au point M et rapportés à l'unité d'aire de la surface déformée (M), et par F, G, H, I, J, K les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort et du moment de déformation qui s'exercent au point M sur C, rapportés à l'unité de longueur de C. Introduisons enfin douze nouvelles auxiliaires $A_1^{(1)}$, $B_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$; $A_2^{(1)}$, $B_2^{(1)}$, $C_2^{(1)}$; $P_1^{(1)}$, $Q_1^{(1)}$, $R_1^{(1)}$; $P_2^{(1)}$, $Q_2^{(1)}$. $R_2^{(1)}$, par les formules

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta}{\Delta_1}A_1^{(1)} &= A_1\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + A_2\frac{\partial x}{\partial\rho_2}, \qquad \frac{\Delta}{\Delta_1}P_1^{(1)} = P_1\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + P_2\frac{\partial x}{\partial\rho_2}, \\
\frac{\Delta}{\Delta_1}A_2^{(1)} &= A_1\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + A_2\frac{\partial y}{\partial\rho_2}, \qquad \frac{\Delta}{\Delta_1}P_2^{(1)} = P_1\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + P_2\frac{\partial y}{\partial\rho_2},
\end{aligned}
$$

et par les analogues obtenues en remplaçant

$$A_1,\ A_2,\ A_1^{(1)},\ A_2^{(1)},\ P_1,\ P_2,\ P_1^{(1)},\ P_2^{(1)}$$

respectivement par

$$B_1,\ B_2,\ B_1^{(1)},\ B_2^{(1)},\ Q_1,\ Q_2,\ Q_1^{(1)},\ Q_2^{(1)},$$

puis par

$$C_1,\ C_2,\ C_1^{(1)},\ C_2^{(1)},\ R_1,\ R_2,\ R_1^{(1)},\ R_1^{(1)}.$$

Nous appelons Δ_1 l'analogue de Δ ; nous posons donc

$$\Delta_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Nous obtenons la relation transformée

$$-\iint (X\lambda_1 + Y\lambda_2 + Z\lambda_3 + L\mu_1 + M\mu_2 + N\mu_3)\,\Delta_1\,dx\,dy$$

$$+\int (F\lambda_1 + G\lambda_2 + H\lambda_3 + I\mu_1 + J\mu_2 + K\mu_3)\,ds$$

$$-\iint \left(A_1^{(1)}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + A_2^{(1)}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y} + B^{(1)}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + B_2^{(1)}\frac{\partial\lambda_2}{\partial y} + C_1^{(1)}\frac{\partial\lambda_3}{\partial x} + C_2^{(1)}\frac{\partial\lambda_3}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$-\iint \left(P_1^{(1)}\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + P_2^{(1)}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + Q_1^{(1)}\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + Q_2^{(1)}\frac{\partial\mu_2}{\partial y} + R_1^{(1)}\frac{\partial\mu_3}{\partial x} + R_2^{(1)}\frac{\partial\mu_3}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$-\iint \left\{\left(C_2^{(1)} - \frac{\partial z}{\partial x}B_1^{(1)} - \frac{\partial z}{\partial y}B_2^{(1)}\right)\mu_1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}A_1^{(1)} + \frac{\partial z}{\partial y}A_2^{(1)} - C_1^{(1)}\right)\mu_2 + (B_1^{(1)} - A_2^{(1)})\mu_3\right\}dx\,dy = 0,$$

où les intégrales sont relatives à la courbe C de la surface (M) et au domaine limité par elle, ds désignant l'élément d'arc de C.

Appliquons de nouveau la formule de GREEN aux termes qui renferment les dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, par rapport à x, y, ; il vient, puisque λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, sont arbitraires,

$$\frac{\partial A_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial A_2^{(1)}}{\partial y} = \Delta_1 X, \qquad F = A_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - A_2^{(1)}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial B_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial B_2^{(1)}}{\partial y} = \Delta_1 Y, \qquad G = B_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - B_2^{(1)}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial C_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial C_2^{(1)}}{\partial y} = \Delta_1 Z, \qquad H = C_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - C^{(1)}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial P_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial y} + C_2^{(1)} - \frac{\partial z}{\partial x}B_1^{(1)} - \frac{\partial z}{\partial y}B_2^{(1)} = \Delta_1 L, \qquad I = P_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - P_2^{(1)}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial Q_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}A_1^{(1)} + \frac{\partial z}{\partial y}A_2^{(1)} - C_1^{(1)} = \Delta_1 M, \qquad J = Q_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - Q_2^{(1)}\frac{dx}{ds},$$

$$\frac{\partial R_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial y} + B_1^{(1)} - A_2^{(1)} = \Delta_1 N, \qquad K = R_1^{(1)}\frac{dy}{ds} - R_2^{(1)}\frac{dx}{ds}.$$

Ces formules peuvent se déduire *a posteriori* de celles données précédem-

ment ; prenons, par exemple, celles de droite ; on a vu (§ **35**, 1) que F, G, H peuvent s'obtenir en remplaçant dans

$$A_1 \frac{d\rho_2}{ds} - A_2 \frac{d\rho_1}{ds}, \quad B_1 \frac{d\rho_2}{ds} - B_2 \frac{d\rho_1}{ds}, \quad C_1 \frac{d\rho_2}{ds} - C_2 \frac{d\rho_1}{ds},$$

les expressions $\frac{d\rho_1}{ds}$, $\frac{d\rho_2}{ds}$ respectivement par

$$-\frac{1}{\Delta}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mu \frac{\partial y}{\partial \rho_2} + \nu \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right), \quad \frac{1}{\Delta}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \mu \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + \nu \frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right),$$

en désignant par λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale extérieure à C, ce qui donne

$$F = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) + A_1^{(1)}\left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)A_2^{(1)}\right],$$

$$G = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) + B_1^{(1)}\left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)B_2^{(1)}\right],$$

$$H = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) C_1^{(1)} + \left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)C_2^{(1)}\right],$$

et de même

$$I = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) P_1^{(1)} + \left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)P_2^{(1)}\right],$$

$$J = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) Q_1^{(1)} + \left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)Q_2^{(1)}\right],$$

$$H = \frac{1}{\Delta_1}\left[\left(\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}\right) R_1^{(1)} + \left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)R_2^{(1)}\right],$$

ce qui revient à dire que l'on a :

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}}{\Delta_1}, \quad \frac{dx}{ds} = -\frac{\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}}{\Delta_1}.$$

Or ces dernières relations résultent de ce que les formules

$$\lambda \frac{dx}{ds} + \mu \frac{dy}{ds} + \nu \frac{dz}{ds} = 0, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

entraînent

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{-\left(\mu + \nu \frac{\partial z}{\partial y}\right)} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\lambda + \nu \frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{\frac{dz}{ds}}{\lambda \frac{\partial z}{\partial y} - \mu \frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

le signe du dernier rapport correspondant au sens de parcours de C, qui figure dans l'emploi de la formule de GREEN.

38. Introduction de nouvelles auxiliaires fournies par la considération des trièdres non trirectangles formés de Mz_1' et des tangentes aux courbes (ρ_1) **et** (ρ_2). – Dans le § **35**, 3, nous avons envisagé un trièdre trirectangle $Mx_1'y_1'z_1'$, dont l'axe Mz_1' est normal à (M). Les formules donnant F_0'', G_0'', H_0'', I_0'', J_0'', K_0'', nous ont conduits à introduire de nouvelles auxiliaires ; mais nous pouvons aussi considérer les équations indéfinies et les rapporter au trièdre, qui n'est plus généralement trirectangle, formé par l'axe Mz_1', et par les tangentes aux courbes (ρ_1) et (ρ_2). Ceci se fait aisément en utilisant les calculs déjà effectués par l'intermédiaire de $Mx_1'y_1'z_1'$. Il nous suffit de partir des équations obtenues à l'égard de ce dernier et de mettre en évidence les combinaisons

$$X_0''\xi_1^{(1)}+Y_0''\eta_1^{(1)},\quad X_0''\xi_2^{(1)}+Y_0''\eta_1^{(1)},\quad L_0''\xi_1^{(1)}+M_0''\eta_1^{(1)},\quad L_0''\xi_2^{(1)}+M_0''\eta_1^{(1)}.$$

Posons
$$\mathcal{A}_1''=\xi_2^{(1)}A_1''+\eta_2^{(1)}B_1'',\qquad \mathcal{A}_2''=\xi_2^{(1)}A_2''+\eta_2^{(1)}B_2'',$$
$$\mathcal{B}_1''=\xi_1^{(1)}A_1''+\eta_1^{(1)}B_1'',\qquad \mathcal{B}_2''=\xi_1^{(1)}A_2''+\eta_1^{(1)}B_2'',$$

et quatre formules analogues pour $\mathcal{X}_1''$, $\mathcal{Q}_1''$, $\mathcal{X}_2''$, $\mathcal{Q}_2''$; nous en déduisons :

$$A_1''=\frac{\eta_2^{(1)}\mathcal{B}_1''-\eta_1^{(1)}\mathcal{A}_1''}{\Delta},\qquad A_2''=\frac{\eta_2^{(1)}\mathcal{B}_2''-\eta_1^{(1)}\mathcal{A}_2''}{\Delta},$$
$$B_1''=\frac{\xi_1^{(1)}\mathcal{A}_1''-\xi_2^{(1)}\mathcal{B}_1''}{\Delta},\qquad B_2''=\frac{\xi_1^{(1)}\mathcal{A}_2''-\xi_2^{(1)}\mathcal{B}_2''}{\Delta},$$

et des formules analogues pour P_1'', Q_1'', P_2'', Q_2''. Les équations s'écrivent :

$$\frac{\partial\mathcal{A}_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mathcal{A}_2''}{\partial\rho_2}-\Sigma_2\mathcal{A}_1''-\Sigma_3\mathcal{A}_2''-\theta_2\mathcal{B}_1''-\theta_3\mathcal{B}_2''-\Delta\mathcal{D}'C_1''-\Delta\mathcal{D}''C_2''=\Delta_0(\xi_2^{(1)}X_0''+\eta_2^{(1)}Y_0''),$$
$$\frac{\partial\mathcal{B}_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mathcal{B}_2''}{\partial\rho_2}-\Sigma_1\mathcal{A}_1''-\Sigma_2\mathcal{A}_2''-\theta_1\mathcal{B}_1''-\theta_2\mathcal{B}_2''-\Delta\mathcal{D}C_1''-\Delta\mathcal{D}'C_2''=\Delta_0(\xi_1^{(1)}X_0''+\eta_1^{(1)}Y_0''),$$
$$\frac{\partial C_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial C_2''}{\partial\rho_2}+\frac{\mathcal{E}\mathcal{D}'-\mathcal{F}\mathcal{D}}{\Delta}\mathcal{A}_1''+\frac{\mathcal{G}\mathcal{D}-\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta}\mathcal{B}_1''+\frac{\mathcal{E}\mathcal{D}''-\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta}\mathcal{A}_2''+\frac{\mathcal{G}\mathcal{D}-\mathcal{F}\mathcal{D}''}{\Delta}\mathcal{B}_2''=\Delta_0Z_0'',$$
$$\frac{\partial\mathcal{X}_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mathcal{X}_2''}{\partial\rho_2}-\Sigma_2\mathcal{X}_1''-\Sigma_3\mathcal{X}_2''-\theta_2\mathcal{Q}_1''-\theta_3\mathcal{Q}_2''-\Delta\mathcal{D}'R_1''-\Delta\mathcal{D}''R_2''-\Delta C_1''=\Delta_0(\xi_2^{(1)}L_0''+\eta_2^{(1)}M_0''),$$
$$\frac{\partial\mathcal{Q}_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\mathcal{Q}_2''}{\partial\rho_2}-\Sigma_1\mathcal{X}_1''-\Sigma_2\mathcal{X}_2''-\theta_1\mathcal{Q}_1''-\theta_2\mathcal{Q}_2''-\Delta\mathcal{D}R_1''-\Delta\mathcal{D}'R_2''+\Delta C_2''=\Delta_0(\xi_1^{(1)}L_0''+\eta_1^{(1)}M_0''),$$
$$\frac{\partial R_1''}{\partial\rho_1}+\frac{\partial R_2''}{\partial\rho_2}+\frac{\mathcal{E}\mathcal{D}'-\mathcal{F}\mathcal{D}}{\Delta}\mathcal{X}_1''+\frac{\mathcal{G}\mathcal{D}-\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta}\mathcal{Q}_1''+\frac{\mathcal{E}\mathcal{D}''-\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta}\mathcal{X}_2''+\frac{\mathcal{G}\mathcal{D}'-\mathcal{F}\mathcal{D}''}{\Delta}\mathcal{Q}_2''$$
$$+\frac{\mathcal{E}\mathcal{A}_1''+\mathcal{F}(\mathcal{A}_2''-\mathcal{B}_1'')-\mathcal{G}\mathcal{B}_2''}{\Delta}=\Delta_0N_0'',$$

Dans ces formules, on désigne par Σ_1, Σ_2, Σ_3, θ_1, θ_2, θ_3, les six symboles de Christoffel :

$$\Sigma_1=\frac{-\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}+2\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_1}}{2\Delta^2},\qquad \theta_1=\frac{\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_1}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_1}-2\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_1}}{2\Delta^2},$$
$$\Sigma_2=\frac{\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}}{2\Delta^2},\qquad \theta_2=\frac{\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_1}}{2\Delta^2},$$
$$\Sigma_3=\frac{\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_2}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_1}-2\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_2}}{2\Delta^2},\qquad \theta_3=\frac{2\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_2}-\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial\rho_2}}{2\Delta^2},$$

et par $\Delta^2\mathcal{D}$, $\Delta^2\mathcal{D}'$, $\Delta^2\mathcal{D}''$ les trois déterminants définis par l'identité (1) :

$$\Delta^2(\mathcal{D}d\rho_1^2+2\mathcal{D}'d\rho_1d\rho_2+\mathcal{D}''d\rho_2^2)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho_1}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1^2}d\rho_1^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}d\rho_1d\rho_2+\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_2^2}d\rho_2^2 \\ \frac{\partial y}{\partial\rho_1}\frac{\partial y}{\partial\rho_2}\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_1^2}d\rho_1^2+2\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_1\partial\rho_2}d\rho_1d\rho_2+\frac{\partial^2 y}{\partial\rho_2^2}d\rho_2^2 \\ \frac{\partial z}{\partial\rho_1}\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1^2}d\rho_1^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_1\partial\rho_2}d\rho_1d\rho_2+\frac{\partial^2 z}{\partial\rho_2^2}d\rho_2^2 \end{vmatrix}.$$

Pour les calculs précédents, nous avons utilisé les relations :

$$p_1^{(1)}=\xi_1^{(1)}\mathcal{D}'-\xi_2^{(1)}\mathcal{D},\qquad q^{(1)}=\eta_1^{(1)}\mathcal{D}'-\eta_2^{(1)}\mathcal{D},$$
$$p_2^{(1)}=\xi_1^{(1)}\mathcal{D}''-\xi_2^{(1)}\mathcal{D}',\qquad q_2^{(1)}=\eta_1^{(1)}\mathcal{D}''-\eta_2^{(1)}\mathcal{D}',$$
$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1}-\eta_1r_1=\Theta_1\xi_1+\Sigma_1\xi_2,\qquad \frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_1}-\eta_2r_1=\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_2}-\eta_1r_2=\Theta_2\xi_1+\Sigma_2\xi_2,$$
$$\frac{\partial\xi_2}{\partial\rho_2}-\eta_2r_2=\Theta_3\xi_1+\Sigma_3\xi_2,$$
$$\frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_1}+\xi_1r_1=\Theta_1\eta_1+\Sigma_1\eta_2,\qquad \frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_1}+\xi_2r_1=\frac{\partial\eta_1}{\partial\rho_2}+\xi_1r_2=\Theta_2\eta_1+\Sigma_2\eta_2,$$
$$\frac{\partial\eta_2}{\partial\rho_2}+\xi_2r_2=\Theta_3\eta_1+\Sigma_3\eta_2.$$

39. Travail virtuel extérieur; théorème analogue à ceux de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les §§ précédents. — Nous donnerons le nom de *travail virtuel extérieur* sur la surface déformée (M), dans une déformation virtuelle quelconque, à l'expression :

$$\delta\mathcal{T}_e=-\int_{c_0}(F_0'\delta'x+G_0'\delta'y+H_0'\delta'z+I_0'\delta\text{I}'+J_0'\delta\text{J}'+K_0'\delta\text{K}')\,ds_0$$
$$+\iint_{c_0}(X_0'\delta'x+Y_0'\delta'y+Z_0'\delta'z+L_0'\delta\text{I}'+M_0'\delta\text{J}'+N_0'\delta\text{K}')\,\Delta_0\,d\rho_1\,d\rho_2.$$

On peut donner à cette formule d'autres formes, en introduisant d'autres éléments; supposons, par exemple, que l'on introduise les expressions X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 ; F_0, G_0, H_0, I_0, J_0, K_0. A cet effet, désignons par δI, δJ, δK les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz' sont $\delta\text{I}'$, $\delta\text{J}'$, $\delta\text{K}'$, en sorte que l'on a, par exemple,

$$-\delta\text{I}=\alpha''\delta\alpha'+\beta''\delta\beta'+\gamma''\delta\gamma'=-(\alpha'\delta\alpha''+\beta'\delta\beta''+\gamma'\delta\gamma''),$$

en supposant toujours les axes que l'on considère de même disposition. Il vient alors :

$$\delta\mathcal{T}_e=-\int_{c_0}(F_0\delta x+G_0\delta y+H_0\delta z+I_0\delta\text{I}+J_0\delta\text{J}+K_0\delta\text{K})\,ds_0$$
$$+\iint_{c_0}(X_0\delta x+Y_0\delta y+Z_0\delta z+L_0\delta\text{I}+M_0\delta\text{J}+N_0\delta\text{K})\,\Delta_0 d\rho_1 d\rho_2.$$

(1) Comme nous le répéterons plus loin, nous désignons ici par $\Delta^2\mathcal{D}$, $\Delta^2\mathcal{D}'$, $\Delta^2\mathcal{D}''$, les quantités que M. Darboux désigne par D, D', D''.

La force (X_0', Y_0', Z_0') ou (X_0, Y_0, Z_0), le moment (L_0', M_0', N_0') ou (L_0, M_0, N_0) sont rapportés à l'unité d'aire de la surface *non déformée*; l'effort (F_0', G_0', H_0') ou (F_0, G_0, H_0) et le moment de déformation (I_0', J_0', K_0') ou (I_0, J_0, K_0) sont rapportés à l'unité de longueur du contour C_0 *non déformé*. Partons de la formule :

$$\iint_{C_0} \delta(W\Delta_0)\, d\rho_1 d\rho_2 = -\delta\mathfrak{T}_e,$$

appliquée à une portion quelconque de la surface déformable limitée par un contour C_0.

Comme $\delta(W\Delta_0)$ doit être identiquement nul, en vertu de l'invariance de W et de Δ_0 dans le groupe des déplacements euclidiens, quand les variations δx, δy, δz sont données par les formules (9), page 960, savoir :

$$\begin{aligned} \delta x &= (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\,\delta t, \\ \delta y &= (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\,\delta t, \\ \delta z &= (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\,\delta t, \end{aligned}$$

et quand δ_I, δ_J, δ_K sont donnés par

$$\delta_I = \omega_1 \delta t, \qquad \delta_J = \omega_2 \delta t. \qquad \delta_K = \omega_3 \delta t,$$

et cela quelles que soient les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3, nous en concluons, d'après l'expression précédente de $\delta\mathfrak{T}_e$, que l'on a :

$$\int_{C_0} F_0 ds_0 - \iint_{C_0} X_0 \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = 0, \qquad \int_{C_0} G_0 ds_0 - \iint_{C_0} Y_0 \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

$$\int_{C_0} H_0 ds_0 - \iint_{C_0} Z_0 \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

$$\int_{C_0} (I_0 + yH_0 - zG_0)\, ds_0 - \iint_{C_0} (L_0 + yZ_0 - zY_0)\, \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

et deux formules analogues.

Ces six formules se déduisent facilement de celles que l'on écrit d'ordinaire au moyen du principe de solidification (1). *On peut concevoir, dans ces formules, que le contour* C_0 *est variable.*

Les auxiliaires introduites dans les §§ précédents ne sont pas les seules que l'on pourrait envisager : en nous bornant à leur considération, nous ajouterons simplement quelques remarques faciles.

Nous avons, en définitive, introduit deux systèmes d'efforts et de moments de déformation relatifs à un point M de la surface déformée; les premiers sont ceux qui s'exercent sur les courbes (ρ_1) et (ρ_2); les autres sont ceux qui

(1) Le passage des éléments rapportés aux unités d'aire de (M_0) et de longueur de C_0 aux éléments rapportés aux unités d'aire de (M) et de longueur de C est tellement immédiat qu'il suffit de se borner, comme nous le faisons, aux premiers, par exemple.

s'exercent sur des courbes orthogonales de définition arbitraire et à préciser, et dont les tangentes Mx_1', My_1', ont des directions arbitraires rectangulaires et à préciser, dans le plan tangent en M à (M).

Les formules que nous avons indiquées donnent les derniers éléments au moyen des premiers et inversement les premiers éléments au moyen des seconds.

Supposons maintenant que l'on introduise la fonction W ; les premiers efforts et moments de déformation ont des expressions déjà indiquées et on en déduit immédiatement les expressions relatives aux seconds. Mais, dans ces calculs, on peut rendre explicites les fonctions que l'on veut mettre en évidence suivant la nature du problème, et qui seront, par exemple, x, y, z et trois paramètres (2) λ_1, λ_2, λ_3 au moyen desquels on exprime α, α',... γ''.

Si l'on introduit x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 et si l'on continue de désigner par W la fonction portant sur ρ_1, ρ_2, sur les dérivées premières de x, y, z par rapport à ρ_1, ρ_2, sur λ_1, λ_2, λ_3 et sur leurs dérivées premières par rapport à ρ_1, ρ_2, et obtenue en remplaçant dans la fonction $W(\rho_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i)$ les différentes quantités ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i par leurs valeurs données au moyen des formules (30) et (31), on aura :

$$A_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_i}}, \quad B_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_i}}, \quad C_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_i}}, \quad \Pi_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i}}, \quad X_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i}}, \quad \Sigma_i = \Delta_0 \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}}.$$

40. Notion de l'énergie de déformation. Etat naturel de la surface déformable. — Envisageons les deux états (M_0) et (M) de la surface déformable limités par les contours C_0 et C, et considérons une suite quelconque d'états partant de (M_0) pour aboutir à (M) ; il suffit à cet effet de considérer des fonctions x, y, z, α, α',... γ'' de ρ_1, ρ_2 et d'une variable h qui, pour la valeur o de la variable h, se réduisent respectivement à x_0, y_0, z_0, α_0, α_0',... γ_0'', et, pour la valeur h de h, se réduisent respectivement aux valeurs x, y, z, α, α',... γ'' relatives à (M).

En faisant varier le paramètre h de o à h d'une façon continue, nous obtenons une déformation continue permettant de passer de l'état (M_0) à l'état (M). Envisageons, dans cette déformation continue le *travail total* effectué par les forces et les moments extérieurs appliqués aux différents éléments superficiels de la surface et par les efforts et moments de déformation appliqués aux différents éléments du contour ; il suffit, pour obtenir ce travail total, d'intégrer de o à h la différentielle obtenue, en partant de l'une des expressions de $\delta\mathcal{T}_e$ du § précédent, et en y substituant aux variations de x, y, z, α, α',... γ'' les différentielles partielles qui correspondent à l'accroissement dh de h ; la formule

$$\delta\mathcal{T}_e = -\iint_{C_0} \delta(W\Delta_0)\, d\rho_1 d\rho_2$$

(2) Comme telles auxiliaires λ_1, λ_2, λ_3, on peut prendre, par exemple, les composantes de la rotation qui amène les axes Ox, Oy, Oz à être parallèles respectivement à Mx', My', Mz'.

donnant, pour la valeur actuelle de $\delta\mathcal{C}_e$, l'expression $-\iint_{c_0}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial h}dhd\rho_1d\rho_2$, nous obtenons, pour le travail total,

$$-\int_0^h\left(\iint_{c_0}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial h}d\rho_1d\rho_2\right)dh=-\iint_{c_0}\left[(W\Delta_0)_M-(W\Delta_0)_{M_0}\right]d\rho_1d\rho_2.$$

Le travail considéré est indépendant des états intermédiaires et ne dépend que des états extrêmes considérés (M_0) et (M).

Ceci conduit à introduire la notion d'*énergie de déformation*, qui doit être distinguée de celle de l'action envisagée précédemment; nous dirons que — W est la *densité de l'énergie de déformation*, rapportée à l'unité d'aire de la surface non déformée.

Ces considérations ne sont que la répétition de celles que nous avons présentées dans le § **12**; de même les observations relatives à l'*état naturel* de la ligne déformable, qui font l'objet du § **13**, peuvent être reproduites à l'égard de la surface déformable.

41. Notion du trièdre caché et du W caché. — Dans l'étude de la surface déformable, il est naturel, comme dans celle de la ligne déformable, de porter l'attention d'une façon particulière sur la surface géométrique dessinée par la surface déformable; ceci revient à envisager à part x, y, z et à considérer $\alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ comme de simples auxiliaires; c'est ce que nous pouvons également exprimer en concevant que l'on ignore l'existence des trièdres qui déterminent la surface déformable et que l'on ne connaisse que les sommets de ces trièdres. En nous plaçant à ce point de vue, pour envisager les équations aux dérivées partielles auxquelles on peut être conduit suivant les cas, nous pouvons introduire la notion du *trièdre caché*, et nous sommes conduits à une classification résultant des diverses circonstances qui peuvent se présenter dans l'élimination de $\alpha, \alpha', \ldots \gamma''$.

Une première étude qui se présente est donc celle des réductions qui peuvent se produire dans l'élimination de $\alpha, \alpha', \ldots \gamma''$; dans les cas particuliers correspondants, où l'attention est portée d'une manière presque exclusive sur la surface ponctuelle dessinée par la surface déformée (M), on pourra même parfois faire abstraction de (M_0), et, par suite, de la déformation permettant de passer de (M_0) à (M); c'est à ce dernier point de vue que nous pourrons retrouver la surface dite flexible et inextensible des géomètres.

Le trièdre peut être employé d'une autre façon; nous pouvons faire sur lui des hypothèses particulières, et de même sur la surface (M); tout ceci revient à envisager des déformées particulières de la surface déformable libre. Si les relations que nous imposons sont de simples relations entre ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, comme ce sera le cas dans les applications que nous aurons à étudier, nous pourrons tenir compte de ces relations dans le calcul de W et déduire de W des fonctions plus particulières; la question intéressante qui se posera sera d'introduire simplement ces formes particulières, et de considérer, en quelque sorte, comme *cachée*, la fonction W générale qui aura servi de point

de départ. Nous aurons ainsi une *théorie qui sera spéciale aux déformées particulières mises en évidence par les relations données entre* ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i.

Nous verrons que l'on peut ainsi, au moyen de la théorie de la surface déformable libre, rassembler à titre de cas particuliers et comme provenant d'une même origine les équations qui sont le résultat des problèmes spéciaux que l'on a seulement abordés jusqu'ici. Dans ces derniers, on se place quelquefois dans des circonstances propres à éviter la considération des déformations ; en réalité, ils ont besoin d'être complétés ; c'est ce que l'on peut faire, dans les applications pratiques, en envisageant la déformation infiniment petite.

Prenons le cas où la force et le moment extérieurs ne renferment tout au plus que les dérivées premières des inconnues x, y, z et λ_1, λ_2, λ_3 ; les dérivées secondes de ces inconnues ne seront introduites dans les équations aux dérivées partielles que par W ; or les dérivées de x, y, z ne figurent que dans ξ_i, η_i, ζ_i, et celles de λ_1, λ_2, λ_3 ne se présentent que dans p_i, q_i, r_i. On voit donc que si W ne dépend que de ξ_i, η_i, ζ_i, ou ne dépend que de p_i, q_i, r_i, il y aura réduction dans les ordres des dérivées entrant dans le système d'équations aux dérivées partielles. Nous commencerons par examiner le premier de ces deux cas.

42. Cas où W ne dépend que de ρ_1, ρ_2, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2. La surface qui, dans le cas de la déformation infiniment petite, conduit à la membrane étudiée par Poisson et Lamé. La surface fluide renfermant comme cas particulier la surface envisagée par Lagrange, Poisson et M. Duhem. — Supposons que W ne dépende que des quantités ρ_i, ξ_i, η_i, ζ_i et non des p_i, q_i, r_i ; les équations se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_2}}=\Delta_0X_0,\qquad \frac{\partial W}{\partial\lambda_1}+\Delta_0\mathfrak{L}_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial y}{\partial\rho_1}}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial y}{\partial\rho_2}}=\Delta_0Y_0,\qquad \frac{\partial W}{\partial\lambda_2}+\Delta_0\mathfrak{M}_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial_1}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial z}{\partial\rho_1}}+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W\Delta_0)}{\partial\frac{\partial z}{\partial\rho_2}}=\Delta_0Z_0,\qquad \frac{\partial W}{\partial\lambda_3}+\Delta_0\mathfrak{N}_0=0,$$

dans lesquelles W ne dépend que de ρ_1, ρ_2, $\frac{\partial x}{\partial\rho_1},\dots\frac{\partial z}{\partial\rho_2}$, λ_1, λ_2, λ_3 ; elles nous montrent que, si nous prenons le cas simple où X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont des fonctions données (1) de ρ_1, ρ_2, x, y, z, $\frac{\partial x}{\partial\rho_1},\dots\frac{\partial z}{\partial\rho_2}$, λ_1, λ_2, λ_3, les trois équations de droite peuvent être résolues par rapport à λ_1, λ_2, λ_3, et on obtient finalement trois équations aux dérivées partielles ne renfermant, avec nos hypothèses, que ρ_1, ρ_2, x, y, z et leurs dérivées premières et secondes.

(1) Nous supposons que X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne renferment pas de dérivées de λ_1, λ_2, λ_3 pour simplifier l'exposition, et pour indiquer plus facilement ce à quoi nous voulons faire allusion.

Bornons-nous au cas particulier, dans lequel les fonctions données $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont nulles; il en sera de même pour les valeurs correspondantes des fonctions de l'un quelconque des systèmes (L_0, M_0, N_0), (L_0', M_0', N_0'), (L_0'', M_0'', N_0''). Il en résulte que les équations

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 0$$

reviennent soit à

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_1} C_1 - \frac{\partial z}{\partial \rho_1} B_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} C_2 - \frac{\partial z}{\partial \rho_2} B_2 = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial \rho_1} A_1 - \frac{\partial x}{\partial \rho_1} C_1 + \frac{\partial z}{\partial \rho_2} A_2 - \frac{\partial x}{\partial \rho_2} C_2 = 0,$$
$$\frac{\partial x}{\partial \rho_1} B_1 - \frac{\partial y}{\partial \rho_1} A_1 + \frac{\partial x}{\partial \rho_2} B_2 - \frac{\partial y}{\partial \rho_2} A_2 = 0,$$

soit à :

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0,$$

en sorte que l'effort en un point d'une courbe quelconque est dans le plan tangent à la surface déformée et que les efforts tranchants s'exerçant sur deux directions rectangulaires sont égaux.

Ceci posé, observons que si l'on part de deux positions (M_0) et (M) supposées *données* et que l'on en déduise, comme aux §§ **34** et **35**, les fonctions $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, il peut arriver, dans le cas où ces trois fonctions sont nulles, que ce résultat se présente accidentellement, c'est-à-dire pour un certain ensemble de déformées particulières; mais il peut arriver que ce résultat se présente quelle que soit la déformée (M), que ce soit une conséquence de la nature des (M), c'est-à-dire de la forme de W.

Envisageons ce dernier cas, qui est particulièrement intéressant; W est alors une simple fonction (1) de ρ_1, ρ_2, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, ces trois dernières quantités étant définies par les formules (32) du § **31**. Les équations déduites des §§ **34** et **35** se réduisent soit à :

$$\sum_i \left(\frac{\partial A_i'}{\partial \rho_i} + q_i C_i' - r_i B_i' \right) = \Delta_0 X_0', \qquad F_0' = A_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\sum_i \left(\frac{\partial B_i'}{\partial \rho_i} + r_i A_i' - p_i C_i' \right) = \Delta_0 Y_0', \qquad G_0' = B_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\sum_i \left(\frac{\partial C_i'}{\partial \rho_i} + p_i' B_i' - q_i' A_i' \right) = \Delta_0 Z_0', \qquad H_0' = C_1' \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

où l'on a :

$$A_1' = \Delta_0 \left(2\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \xi_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right), \qquad B_1' = \Delta_0 \left(2\eta_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \eta_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$C_1' = \Delta_0 \left(2\zeta_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \zeta_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$A_2' = \Delta_0 \left(\xi_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\xi_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right), \qquad B_2' = \Delta_0 \left(\eta_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\eta_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$
$$C_2' = \Delta_0 \left(\zeta_1 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\zeta_2 \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$

(1) Le trièdre est complètement caché ; nous pouvons aussi concevoir que nous ayons une surface simplement ponctuelle.

soit encore à ;

$$\frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial A_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 X_0, \qquad F_0 = A_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial B_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 Y_0, \qquad G_0 = B_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\frac{\partial C_1}{\partial \rho_1} + \frac{\partial C_2}{\partial \rho_2} = \Delta_0 Z_0, \qquad H_0 = C_1 \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2 \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

où l'on a :

$$A_1 = \Delta_0 \left(2 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right), \qquad B_1 = \Delta_0 \left(2 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$C_1 = \Delta_0 \left(2 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$A_2 = \Delta_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right), \qquad B_2 = \Delta_0 \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2 \frac{\partial y}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$
$$C_2 = \Delta_0 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2 \frac{\partial z}{\partial \rho_2} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$

soit encore à :

$$\sum_i \left(\frac{\partial A_i''}{\partial \rho_i} + q_i^{(1)} C_i'' - r_i^{(1)} B_i'' \right) = \Delta_0 X_0'', \quad F_0'' = A_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - A_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\sum_i \left(\frac{\partial B_i''}{\partial \rho_i} + r_i^{(1)} A_i'' - p_i^{(1)} C_i'' \right) = \Delta_0 Y_0'', \quad G_0'' = B_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - B_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$
$$\sum_i \left(\frac{\partial C_i''}{\partial \rho_i} + p_i^{(1)} B_i'' - q_i^{(1)} A_i'' \right) = \Delta_0 Z_0'', \quad H_0'' = C_1'' \frac{d\rho_2}{ds_0} - C_2'' \frac{d\rho_1}{ds_0},$$

où l'on a :

$$A_1'' = \Delta_0 \left(2\xi_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \xi_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right), \qquad B_1'' = \Delta_0 \left(2\eta_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \eta_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$C_1'' = \Delta_0 \left(2\zeta_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \zeta_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} \right),$$
$$A_2'' = \Delta_0 \left(\xi_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\xi_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right), \qquad B_2'' = \Delta_0 \left(\eta_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\eta_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$
$$C_2'' = \Delta_0 \left(\zeta_1^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\zeta_2^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} \right),$$

soit enfin aux équations :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \begin{vmatrix} N_1 & \xi_2^{(1)} \\ T & \eta_2^{(1)} \end{vmatrix} - r_1^{(1)} \begin{vmatrix} T & \xi_2^{(1)} \\ N_2 & \eta_2^{(1)} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & N_1 \\ \eta_1^{(1)} & T \end{vmatrix} - r_2^{(1)} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & T \\ \eta_1^{(1)} & N_2 \end{vmatrix} = \Delta_0 X_0'',$$
$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \begin{vmatrix} T & \xi_2^{(1)} \\ N_2 & \eta_2^{(1)} \end{vmatrix} + r_1^{(1)} \begin{vmatrix} N_1 & \xi_2^{(1)} \\ T & \eta_2^{(1)} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial \rho_2} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & T \\ \eta_1^{(1)} & N_2 \end{vmatrix} + r_2^{(1)} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & N_1 \\ \eta_1^{(1)} & T \end{vmatrix} = \Delta_0 Y_0'',$$
$$p_1^{(1)} \begin{vmatrix} T & \xi_2^{(1)} \\ N_2 & \eta^{(1)} \end{vmatrix} - q_1^{(1)} \begin{vmatrix} N_1 & \xi_2^{(1)} \\ T & \eta_2^{(1)} \end{vmatrix} + p_2^{(1)} \begin{vmatrix} \xi^{(1)} & T \\ \eta^{(1)} & N_2 \end{vmatrix} - q_2^{(1)} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & N_1 \\ \eta^{(1)} & T \end{vmatrix} = \Delta_0 Z_0'',$$

$$F_0'' \frac{ds_0}{ds} = \lambda'' N_1 + \mu'' T, \qquad G_0'' \frac{ds_0}{ds} = \lambda'' T + \mu'' N_2, \qquad H_0'' = 0,$$

où l'on a :

$$N_1 = 2\frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{(\xi_1^{(1)})^2\frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}\frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + (\xi_2^{(1)2})\frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}}\right\},$$

$$T = \frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{2\xi_1^{(1)}\eta_1^{(1)}\frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + (\xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)} + \xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)})\frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + 2\xi_2^{(1)}\eta_2^{(1)}\frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}}\right\},$$

$$N_2 = 2\frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{(\eta_1^{(1)})^2\frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}} + \eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}\frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}} + (\eta_2^{(1)})\frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}}\right\}.$$

Ainsi que nous l'avons dit, l'effort est dans le plan tangent à la surface déformée; N_1 et N_2 sont des efforts normaux, c'est-à-dire des efforts de tension ou de compression; T est un effort tangent à l'élément linéaire sur lequel il s'exerce, c'est-à-dire un effort tranchant.

La considération de la déformation infiniment petite, appliquée à la surface précédente, permet de retrouver la surface ou membrane étudiée par Poisson et Lamé (1).

Observons que nous avons, en outre de la formule déjà utilisée qui donne Δ, les suivantes :

$$\mathcal{E} = (\xi_1^{(1)})^2 + (\eta_1^{(1)})^2, \quad \mathcal{F} = \xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)} + \eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}, \quad \mathcal{G} = (\xi_2^{(1)})^2 + (\eta_2^{(1)})^2,$$

en vertu desquelles N_1, T, N_2 peuvent être considérés comme des fonctions terminées de ρ_1, ρ_2 et de $\xi_1^{(1)}$, $\xi_2^{(1)}$, $\eta_1^{(1)}$, $\eta_2^{(1)}$.

Un cas particulier intéressant, que nous appellerons le cas de la *surface fluide*, s'obtient en supposant, à l'égard des trois fonctions ainsi définies, que l'on a :

$$T = 0, \qquad N_1 = N_2.$$

Si nous observons que l'on a les identités (2) :

$$\begin{aligned}(\xi_1^{(1)})^2\,\mathcal{G} - 2\,\xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)}\,\mathcal{F} + (\xi_2^{(1)})^2\,\mathcal{E} &= \Delta^2,\\ \xi_1^{(1)}\eta_1^{(1)}\mathcal{G} - (\xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)} + \xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)})\,\mathcal{F} + \xi_2^{(1)}\eta_2^{(1)}\,\mathcal{E} &= 0,\\ (\eta_1^{(1)})^2\,\mathcal{G} - 2\,\eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}\,\mathcal{F} + (\eta_2^{(1)})^2\,\mathcal{E} &= \Delta^2,\end{aligned}$$

qui résultent des valeurs :

$$\mathcal{E} = (\xi_1^{(1)})^2 + (\eta_1^{(1)})^2, \quad \mathcal{F} = \xi_1^{(1)}\xi_2^{(1)} + \eta_1^{(1)}\eta_2^{(1)}, \quad \mathcal{G} = (\xi_2^{(1)})^2 + (\eta_2^{(1)})^2$$

des expressions $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ définies par les formules (32), on voit que les deux conditions que nous venons de poser reviennent aux suivantes :

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \mathcal{E}}}{\mathcal{G}} = -\frac{\frac{\partial W}{\partial \mathcal{F}}}{2\mathcal{F}} = \frac{\frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}}}{\mathcal{E}},$$

(1) Poisson. — *Mémoire sur le mouvement des corps élastiques*, p. 488 et suiv., *Mém. de l'Inst.*, T. VIII, 1829; G. Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, 2e édition, 1866, 9e et 10e Leçons.

(2) En vertu de la seconde de ces identités, si T = 0, *quel que soit l'élément linéaire*, on est amené aux conditions qui suivent, et par suite $N_1 = N_2$; on peut se contenter de poser T = 0.

qui entraînent que W ne dépend de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ que par l'intermédiaire de la quantité $\Delta = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$, et est par suite une fonction de ρ_1, ρ_2 et de $\mu = \frac{\Delta}{\Delta_0} - 1$. En continuant de désigner par W l'expression de W au moyen de ρ_1, ρ_2, μ, on aura :

$$N_1 = N_2 = \frac{\partial W}{\partial \mu}, \qquad T = 0.$$

Il est facile d'obtenir la forme particulière que prennent les différents systèmes d'équations examinés, qui ne sont d'ailleurs que des combinaisons ou conséquences simples de l'un d'eux ; en particulier le système de la page 1048 prend, en vertu des équations vérifiées par les $\xi_1^{(1)}$, ... $r_i^{(1)}$, et en désignant par N l'expression $\frac{\partial W}{\partial \mu}$, la forme suivante :

$$\eta_2^{(1)} \frac{\partial N}{\partial \rho_1} - \eta_1^{(1)} \frac{\partial N}{\partial \rho_2} = \Delta_0 X_0'',$$

$$-\xi_2^{(1)} \frac{\partial N}{\partial \rho_1} + \xi_1^{(1)} \frac{\partial N}{\partial \rho_2} = \Delta_0 Y_0'',$$

$$N\left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}\right) = \frac{\Delta_0}{\Delta} Z_0''$$

en utilisant la formule :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{p_2^{(1)}\xi_1^{(1)} - p_1^{(1)}\xi_2^{(1)} + q_2^{(1)}\eta_1^{(1)} - q_1^{(1)}\eta_2^{(1)}}{\xi_1^{(1)}\eta_2^{(1)} - \xi_2^{(1)}\eta_1^{(1)}},$$

dans laquelle figurent les rayons de courbures principaux $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ de la surface déformée (M).

Si nous envisageons le cas particulier dans lequel W ne dépend que de μ, et dans lequel (M_0) ne figure pas explicitement, nous nous trouvons en présence de la surface considérée par LAGRANGE (1), dont l'étude a été reprise par M. DUHEM (2) ; nous avons à faire ici des observations absolument analogues à celles que nous avons présentées à propos du fil flexible et extensible de LAGRANGE. Si, comme le supposent LAGRANGE et M. DUHEM, la surface (M_0) ne figure pas explicitement, cette surface (M_0) ne figure que par la quantité μ ; son existence n'est plus révélée que par cette quantité ; si l'on suppose que la fonction W est *donnée*, à la quantité μ, que nous pouvons introduire comme inconnue auxiliaire dans les problèmes habituels, nous pouvons substituer l'inconnue N ; si la fonction W est cachée, N devient encore une inconnue auxiliaire, mais dont la connaissance ne donnera plus rien *à l'égard de* (M_0).

Dans le cas où la surface (M_0) ne figure que par la quantité μ, on peut prendre, au lieu de ρ_1, ρ_2, deux autres variables quelconques, x, y, par exemple, et si W est donnée, on a deux inconnues et trois équations ; si W étant cachée, μ ne figure que dans W, on est dans le même cas ; dans le pre-

(1) LAGRANGE. — *Mécanique analytique*, 1re Partie, Section V, Chap. III, § II, nos 44-45, p. 158-162 de la 4e édition.

(2) P. DUHEM. — *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique*, T. II, p. 78 et suiv.

mier cas, la remarque faite par Poisson est rappelée par M. Duhem (1). Développons explicitement cette remarque, en mettant les équations sous la forme donnée par Lagrange et plus explicitement par Poisson et M. Duhem (2).

Résolvons les équations précédentes par rapport à $\frac{\partial N}{\partial \rho_1}$ et par rapport à $\frac{\partial N}{\partial \rho_2}$; nous obtenons :

$$\frac{\partial N}{\partial \rho_1} = + \frac{\Delta_0}{\Delta} (X_0'' \xi_1^{(1)} + Y_0'' \eta_1^{(1)}), \qquad \frac{\partial N}{\partial \rho_2} = + \frac{\Delta_0}{\Delta} (X_0'' \xi_2^{(1)} + Y_0'' \eta_2^{(1)});$$

mais, en introduisant, pour un instant, les cosinus directeurs l, l', l'' de Mx_1', m, m', m'' de My_1', n, n', n'' de Mz_1' par rapport aux axes fixes, on a :

$$\xi_i^{(1)} = l \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + l' \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + l'' \frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$
$$\eta_i^{(1)} = m \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + m' \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + m'' \frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$
$$\zeta_i^{(1)} = n \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + n' \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + n'' \frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$

et

$$X_0'' \xi_i^{(1)} + Y_0'' \eta_i^{(1)} = X_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_i} + Y_0 \frac{\partial y}{\partial \rho_i} + Z_0 \frac{\partial z}{\partial \rho_i}.$$

Le système précédent s'écrit :

$$\frac{\partial N}{\partial \rho_1} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \left(X_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + Y_0 \frac{\partial y}{\partial \rho_1} + Z_0 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \right),$$
$$\frac{\partial N}{\partial \rho_2} = \frac{\Delta_0}{\Delta} \left(X_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + Y_0 \frac{\partial y}{\partial \rho_2} + Z_0 \frac{\partial z}{\partial \rho_2} \right),$$
$$N \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} \right) = \frac{\Delta_0}{\Delta} (X_0 n + Y_0 n' + Z_0 n'');$$

c'est celui que l'on trouve, aux notations près, à la page 86 du Tome II du livre déjà cité de M. Duhem (le sens de la normale à (M) est seul changé).

Introduisons les variables x, y, au lieu de ρ_1, ρ_2 ; observons à cet effet que les deux relations, qui renferment les dérivées de N, peuvent se résumer dans la suivante :

$$dN = \frac{\Delta_0}{\Delta} (X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz),$$

ce qui correspond, dans le cas particulier où μ figure seul, à la remarque faite par M. Duhem en haut de la page 90 du Tome II de son ouvrage.

(1) P. Duhem. — Même ouvrage, T. II, p. 92, en haut de la page.
(2) P. Duhem. — Même ouvrage, T. II, p. 86 et 91.

Si x, y sont pris pour variables, nous avons le système

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\Delta_0}{\Delta}\left(X_0 + Z_0\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\Delta_0}{\Delta}\left(Y_0 + Z_0\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$
$$N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\Delta_0}{\Delta}(X_0 n + Y_0 n' + Z_0 n''),$$

qui n'est autre, aux notations près et avec une convention convenable sur le sens de la normale, que celui des équations (31) et (32) de M. Duhem.

Si nous considérons, avec Poisson et M. Duhem, le cas où $\frac{\Delta_0}{\Delta}X_0$, $\frac{\Delta_0}{\Delta}Y_0$, $\frac{\Delta_0}{\Delta}Z_0$ sont des fonctions données de x, y, z (nous pourrions même supposer aussi des dérivées de z), nous avons trois équations renfermant deux inconnues N, z.

Dans le cas particulier où les fonctions données de x, y, z, dont il vient d'être question, sont telles que $\frac{\Delta_0}{\Delta}(X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz)$ est la différentielle totale d'une fonction V, le système de trois équations, qui s'écrit, comme nous l'avons dit,

$$dN = \frac{\Delta_0}{\Delta}(X_0 dx + Y_0 dy + Z_0 dz),$$
$$N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\Delta_0}{\Delta}(X_0 n + Y_0 n' + Z_0 n''),$$

revient au suivant :

$$N - V = const. = C,$$
$$N\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = n\frac{\partial V}{\partial x} + n'\frac{\partial V}{\partial y} + n''\frac{\partial V}{\partial z};$$

N se calcule par la formule

$$N = V + C,$$

et la surface (M) vérifie l'équation [1] :

$$(V + C)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = n\frac{\partial V}{\partial x} + n'\frac{\partial V}{\partial y} + n''\frac{\partial V}{\partial z}.$$

43. La surface flexible et inextensible des géomètres. La surface fluide incompressible. La surface de M. Daniele. — Nous avons

[1] Comparer Duhem, *Elasticité*, etc., T. II, p. 92, qui s'est inspiré des pages 179-181 de Poisson, *Mémoire sur les surfaces élastiques*, lu le 1er août 1814, publié par extrait dans le n° de mai 1815 du Tome III de la *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique*, p. 154-159, puis dans les *Mémoires de l'Institut de France*, année 1812, seconde Partie, qui ont paru en 1816.

considéré le cas particulier où W ne dépend pas de p_i, q_i, r_i et différentes particularisations de ce cas ; nous allons montrer comment, par l'étude de déformations particulières, on peut parvenir à diverses surfaces déjà considérées, au moins en partie, par les auteurs.

Partons d'abord du cas simple dans lequel le trièdre est caché, c'est-à-dire en définitive d'une surface simplement ponctuelle et supposons que ce soit d'abord le cas général dans lequel W est une fonction quelconque de ρ_1, ρ_2, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$.

1. Nous pouvons concevoir que l'on porte l'attention uniquement sur les déformations de la surface pour lesquelles on a :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0.$$

Il suffit, dans les définitions des forces, etc., d'introduire ces hypothèses, et si les forces, etc., sont données, d'introduire ces trois conditions ; dans ce dernier cas, les problèmes habituels, correspondant à la donnée de la fonction W et au cas général où $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} - \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} - \mathcal{G}_0$ ne sont pas nuls, ne peuvent se poser que si les données sont particulières.

Si nous supposons que *seule* la fonction W_0, obtenue en faisant $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ dans $W(\rho_1, \rho_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$, est donnée, que l'on ne connaisse pas les valeurs des dérivées de W par rapport à $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, qu'ainsi W soit *cachée*, nous voyons que N_1, T, N_2 deviennent trois auxiliaires que l'on doit adjoindre à x, y, z, de sorte que, dans le cas où les forces agissant sur les éléments de surface sont données, nous avons six équations aux dérivées partielles à six inconnues ; on n'a alors un problème déterminé que si l'on adjoint des conditions accessoires. Si la figure déformée est assignée *a priori*, on a trois équations entre les fonctions inconnues N_1, T, N_2.

Les équations, auxquelles nous parvenons, sont celles qui définissent la surface flexible et inextensible des géomètres.

2. Nous pouvons concevoir que l'on cherche à définir une surface déformable *sui generis*, dont *la définition tient déjà compte* des conditions

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0.$$

Pour définir la nouvelle surface, en restant dans le même ordre d'idées que précédemment, nous définirons encore F_0', G_0', ... N_0' par l'identité

$$\iint_{c_0} \delta(W\Delta_0) d\rho_1 d\rho_2 = \int_{c_0} (F_0'\delta' x + G_0'\delta' y + \ldots + K_0'\delta\kappa') ds_0$$
$$- \iint_{c_0} (X_0'\delta' x + Y_0'\delta' y + \ldots + N_0'\delta\kappa')\, \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2 ;$$

mais cette identité ne doit plus avoir lieu qu'en vertu de

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0 ;$$

en d'autres termes, nous envisageons une surface dont la théorie va résulter de l'adjonction *a posteriori* des conditions $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ à la con-

naissance d'une fonction $W(\rho_1, \rho_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ et de trois fonctions auxiliaires μ_1, μ_2, μ_3 de ρ_1, ρ_2, au moyen de l'identité :

$$\iint_{c_0} [\delta W + \mu_1 \delta(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) + \mu_2 \delta(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0) + \mu_3 \delta(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)] \Delta d\rho_1 d\rho_2$$
$$= \int_{c_0} (F_0' \delta' x + G_0' \delta' y + \ldots + K_0' \delta\kappa') ds_0 - \iint_{c_0} (X_0' \delta' x + Y_0' \delta' y + \ldots + N_0' \delta\kappa') \Delta_0 d\rho_1 d\rho_2.$$

Ceci revient à remplacer, dans la théorie générale qui précède, W par $W_1 = W + \mu_1(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) + \mu_2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0) + \mu_3(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)$, puis à faire $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$.

Nous revenons, on le voit, à la théorie de la surface flexible correspondant à la fonction W_1 de $\rho_1, \rho_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$.

Si nous nous plaçons dans le cas du W_1 *caché*, en supposant que l'on connaît simplement la valeur $W_0(\rho_1, \rho_2)$, que prennent simultanément W et W_1 pour $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, nous retrouvons la théorie classique de la surface flexible et inextensible.

Observons que si, pour constituer la surface flexible et inextensible, nous tenons, par un changement des auxiliaires, compte *a priori* dans W des conditions $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$, nous sommes conduits à remplacer, dans les calculs relatifs à la surface déformable générale, W par $\mu_1(\mathcal{E} - \mathcal{E}_0) + \mu_2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0) + \mu_3(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)$, et nous tombons sur des formules qui ramènent encore à l'étude d'une surface flexible, dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$; ces formules, en supposant μ_1, μ_2, μ_3 *non connus*, nous ramènent encore à la surface flexible et inextensible des géomètres. A ce dernier point de vue, nous retombons *identiquement*, sur l'exposition donnée par Beltrami, dans le § 2 de son Mémoire bien connu. Nous pouvons observer que, dans le cas où X_0, Y_0, Z_0, exprimés au moyen des équations, sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z d'une fonction φ de ρ_1, ρ_2, x, y, z, les équations, dans lesquelles figurent X_0, Y_0, Z_0, ne sont autres que les équations des extrémales du problème du calcul des variations, consistant à déterminer un extremum de l'intégrale

$$\iint \Delta_0 \varphi d\rho_1 d\rho_2,$$

sous les conditions

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0, \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \qquad \mathcal{G} = \mathcal{G}_0.$$

Plaçons-nous dans le cas où la surface (M_0) disparaît des données et ne se présente pas dans la question ; les variables ρ_1, ρ_2 apparaissent comme un système de coordonnées auquel est rapportée la surface ; si ces variables ne figurent pas dans les données, on peut alors introduire à volonté deux autres variables à leur place. En se mettant à ce point de vue, qui est celui généralement adopté, les équations précédemment établies donnent, à titre de cas particuliers, les diverses équations connues étudiées par les auteurs, pour les-

quelles nous nous bornerons à donner quelques indications bibliographiques dans le § suivant.

Supposons que nous partions de la surface formée au moyen d'une fonction W de ρ_1, ρ_2, Δ, ou, si l'on veut, de ρ_1, ρ_2 et de $\mu = \frac{\Delta}{\Delta_0} - 1$. Concevons que l'on porte uniquement l'attention (1) sur les déformations de la surface, pour lesquelles on a :

$$\mu = 0 ;$$

on se trouvera alors dans le cas de la *surface fluide incompressible*. Il suffit, dans les définitions des forces, etc., d'introduire cette hypothèse, et, si les forces sont données, de poser cette condition ; dans ce dernier cas, les problèmes *habituels*, correspondant à la donnée de la fonction W et au cas général où μ n'est pas nul, exigent que les données soient particulières.

Si nous supposons que *seule* la fonction W_0, obtenue en faisant $\mu = 0$ dans $W(\rho_1, \rho_2, \mu)$, est donnée, et que l'on ne connaisse pas la valeur de $\frac{\partial W}{\partial \mu}$ pour $\mu = 0$, qu'ainsi W soit *cachée*, nous voyons que l'expression N devient une auxiliaire que l'on doit adjoindre à x, y, z, de sorte que, dans le cas des forces données, nous avons quatre équations à quatre inconnues.

On peut encore partir d'une fonction W, qui peut renfermer les ξ_i, η_i, ζ_i aussi bien que les p_i, q_i, r_i, et chercher la forme qu'elle doit avoir pour que l'effort s'exerçant sur un élément linéaire quelconque lui soit normal et de plus soit dans le plan tangent de (M). Il faut et il suffit que W ne dépende des ξ_i, η_i, ζ_i que par l'intermédiaire de l'expression $\Delta = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$.

Nous mentionnerons aussi la surface qui se déduit d'une fonction $W(\rho_1, \rho_2, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ par l'adjonction des conditions $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$; dans le cas où W ne dépend pas de $\mathcal{F}$, on arrive à une surface dont l'étude a été commencée par Daniele (2). Le cas où W dépend de $\mathcal{F}$ peut être rapproché d'une manière intéressante de celui de la surface flexible et inextensible ; il paraît correspondre mieux que ce dernier à ce qu'on peut appeler les *surfaces armées*, ou aux enveloppes, telles que celles des aérostats, formées d'une substance élastique, dans laquelle se trouve noyé un tissu à fils inextensibles.

44. Quelques indications bibliographiques relatives à la surface flexible et inextensible des géomètres. — La surface flexible et inextensible des géomètres a déjà donné lieu, au point de vue mécanique, à un grand nombre de travaux. Il nous a paru utile de rassembler ici les indications bibliographiques suivantes, qui se rattachent à cette surface.

Lagrange. — *Mécanique analytique*. 3e édition, 1re Partie, Section V, Chap. III, § 2, p. 138-143 ; Note de J. Bertrand, p. 140 ; 4e édition, Tome XI des *Œuvres de*

(1) Ce point de vue paraît être celui auquel s'est placé M. Duhem, dans son ouvrage : *Hydrodynamique*, etc. ; voir p. 91 du Tome II, les quatre dernières lignes, et p. 92 la fin du § 5.

(2) E. Daniele. — *Sull' equilibrio delle reti, Rend. del Circolo matematico di Palermo*, 13, p. 28-85, 1899.

LAGRANGE, 1re Partie, Section V, Chap. III, § 2, p. 156-162; Note de M. DARBOUX, p. 160.

POISSON. — *Mémoire sur les surfaces élastiques*; lu le 1er août 1814; inséré dans les *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, année 1812, 2e Partie, p. 167-225.

CISA DE GRÉSY. — *Considérations sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (*Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, vol. XXIII, Parte I, p. 259-294, 1818).

BORDONI. — *Sull' equilibrio astratto delle volte* (*Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze*, residente in Modena, **19**, p. 155-186, 1821); *Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti*, **9**, p. 126-142, 1863; *Sulla stabilità e l'equilibrio di un terrapieno* (*Memorie di Matematica et di Fisica della Società Italiana delle Scienze*, residente in Modena, **24**, p. 75-112, 1850); *Considerazioni sulle svolte delle strade* (*Memorie dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze. Lettere ed Arti*, **9**, p. 143-154, 1863).

MOSSOTTI. — *Lezioni di Meccanica razionale*, Firenze, 1851.

BRIOSCHI. — *Intorno ad alcuni punti della teorica delle superficie* (*Annali di Tortolini*, **3**, p. 293-321, 1852).

JELLETT. — *On the properties of inextensible surfaces* (*Transactions of the Royal Irish Academy*, **22**, p. 343-378, 1853).

MAINARDI. — *Note che risguardano alcuni argomenti della Meccanica razionale ed applicata* (*Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti*, **8**, p. 304-308, 1856).

LECORNU. — *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (*C. R.*, **91**, p. 809-812, 1880; *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 48e cahier, p. 1-109, 1880).

BELTRAMI. — *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Memorie della Academia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, Série 4, **3**, p. 217-265, 1882).

KÖTTER. — *Ueber das Gleichgewicht biegsamer unausdehnbarer Flächen, Inaugural Dissertation*, Halle, 6 février 1883; *Andwendung der Abelschen Functionen auf ein Problem der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **103**, p. 44-74, 1888).

MORERA. — *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Atti della Reale Accademia dei Lincei, Transunti*, Série 3, **7**, p. 268-270, 1883).

VOLTERRA. — *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.* Nota I et Nota II (*Atti della R. Acc. dei Lincei. Transunti*, Série 3, **8**, p. 214-217, 244-246, 1884); *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Atti della R. Accad. dei Lincei, Rendiconti*, Série 4, **1**, p. 274-278, 1885).

MAGGI. — *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze ed Lettere*, Série 2, **17**, p. 683-694, 1884).

PADOVA. — *Ricerche sull' equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili*, Nota I et Nota II (*Atti della R. Acc. dei Lincei, Rendiconti*, Série 4, **1**, p. 269-274, 306-309, 1885).

PENNACCHIETTI. — *Sull' equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (*Palermo Rend.*, **9**, p. 87-95, 1895). *Sulle equazioni di equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (*Atti Acc. Gioenia* (4), **8**, 1895), *Sulla integrazione dell' equazioni di equilibrio delle superficie flessibili e inestendibili* (*Atti Acc. Gioenia*, (4), **8**, 1895).

RAKHMANINOV. — *Equilibre d'une surface flexible inextensible* (en russe). (*Recueil de la Soc. math. de Moscou*, **19**, p. 110-181, 1895).

LECORNU. — *Sur l'équilibre d'une enveloppe ellipsoïdale* (*Comptes rendus*, **122**, p. 218-220, 1896; *Annales de l'Ecole normale supérieure* (3), **17**, p. 501-539, 1900.

DE FRANCESCO. — *Sul moto di un filo et sull' equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile, Napoli Rend.*, (3), **9**, p. 227, 1903 ; *Napoli Atti* (2), **12**, 1905.

45. La surface déformable obtenue en supposant que Mz' est normal à la surface (M). — Nous nous proposons d'introduire la condition que Mz' est normal à la surface (M) ; nous pouvons concevoir cette introduction, soit en partant de la surface déformable précédemment définie, et en étudiant les seules déformations de cette surface qui vérifient les conditions

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_2 = 0, \tag{42}$$

soit en définissant une nouvelle surface déformable, dont on développera la théorie, par analogie avec celle de la première, mais en ayant égard aux conditions (42).

Plaçons-nous au premier point de vue et étudions les déformations de (M) qui vérifient les conditions (42) ; supposons en outre [1], en vue de l'étude de la déformation infiniment petite et afin de pouvoir former une suite continue de surfaces à partir de (M_0), que l'on a $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} = 0$.

Il suffit d'introduire les hypothèses (42) dans les formules des §§ **34** et suivants, pour obtenir les expressions des différents éléments qui figurent dans la théorie. Inversement, si on nous donne, pour fixer les idées, les forces et moments extérieurs, on devra adjoindre aux six équations qui résultent de cette donnée, les deux équations (42), ce qui montre que *si la fonction* W, *qui sert de point de départ, est donnée*, on ne pourra pas se donner arbitrairement les forces et moments extérieurs.

Mais observons qu'en limitant l'étude des déformations à celles qui vérifient les (42), nous avons surtout en vue de constituer une surface particulière ; nous sommes donc amenés, en suivant cette idée, à distinguer trois cas : 1. la fonction W est cachée, et nous ne connaissons que la fonction W_0 relative aux déformations particulières mises en évidence et constituée avec les éléments essentiels de ces déformations ; 2. la fonction W étant encore *cachée*, (c'est-à-dire non donnée), nous connaissons des relations (différentielles, par exemple), qui relient W_0 et les traces (ici trois fonctions) de la fonction W ; 3. la fonction W étant toujours cachée, nous connaissons, partiellement ou totalement, les fonctions qui nous rappellent l'existence de W.

Développons cette indication, en entrant dans le détail des calculs. Par le fait des conditions (42), le trièdre, au lieu de dépendre des six paramètres $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ne dépend plus que de quatre paramètres, par exemple x, y, z, m, en désignant par m l'angle défini par la formule :

$$\operatorname{tg} m = \frac{\eta_1}{\xi_1},$$

qui représente un des angles faits par l'axe Mx' avec la courbe (ρ_2) de (M).

Désignons par $\Delta^2\mathcal{D}$, $\Delta^2\mathcal{D}'$, $\Delta^2\mathcal{D}''$ les déterminants définis par l'identité que nous avons écrite au § **38**, page 1042, qui ne dépendent que des dérivées de x,

[1] Les conditions $\zeta_1^{(0)} = \zeta_2^{(0)} = 0$ peuvent être omises dans notre exposition actuelle et ne figureront en somme que dans l'étude de la déformation infiniment petite.

y, z et sont indépendants de m et de ses dérivées ; rappelons en outre les formules du même paragraphe (symboles de CHRISTOFFEL) :

$$\Sigma_1 = \frac{-\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_2} + 2\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_1}}{2\Delta^2},$$

$$\Sigma_2 = \frac{\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_2}}{2\Delta^2},$$

et, d'après les conventions faites,

$$\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

On a, pour déterminer les rotations p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, les formules suivantes (1) :

$$p_1 = \xi_1\mathcal{D}' - \xi_2\mathcal{D}, \qquad q_1 = \eta_1\mathcal{D}' - \eta_2\mathcal{D},$$
$$p_2 = \xi_1\mathcal{D}'' - \xi_2\mathcal{D}', \qquad q_2 = \eta_1\mathcal{D}'' - \eta_2\mathcal{D}',$$
$$r_1 = -\frac{\partial m}{\partial \rho_1} + \frac{\Sigma_1\Delta}{\mathcal{E}}, \qquad r_2 = -\frac{\partial m}{\partial \rho_2} + \frac{\Sigma_2\Delta}{\mathcal{E}}.$$

Les translations se calculent au préalable par le système :

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \operatorname{tg} m, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \mathcal{E}, \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = \mathcal{F}, \qquad \xi_2^2 + \eta_2^2 = \mathcal{G}.$$

Les translations, on le voit, s'expriment au moyen de m et des dérivées premières de x, y, z ; les rotations p_1, q_1, p_2, q_2 s'expriment au moyen de m et des dérivées premières et secondes de x, y, z ; enfin les rotations r_1, r_2 s'expriment au moyen des dérivées de m et des dérivées premières et secondes de x, y, z.

Si l'on porte ces valeurs, dans la fonction obtenue en faisant $\zeta_1 = \zeta_2 = 0$ dans W, fonction que nous allons désiguer, pour éviter toute confusion. par W^0, nous obtenons la fonction W_0 de ρ_1, ρ_2, m, $\frac{\partial m}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial m}{\partial \rho_2}$, de x, y, z et de leurs dérivées premières et secondes, qui dépend par suite des expressions m, $\frac{\partial m}{\partial \rho_1}$, ... par l'intermédiaire des neuf expressions indépendantes :

$$m,\ \mathcal{E},\ \mathcal{F},\ \mathcal{G},\ r_1,\ r_2,\ \mathcal{D},\ \mathcal{D}',\ \mathcal{D}'',$$

ou ce qui revient au même, des neuf expressions indépendantes ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, r_1, r_2, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$.

Désignons par W_0' la fonction de ces neuf dernières quantités qui, après substitution de leurs valeurs, donne W_0 ; W_0' résulte de W^0 par la substitution de p_1, q_1, p_2, q_2.

Nous avons une fonction W_0' qui, en dehors de ρ_1, ρ_2 renferme les *neuf arguments* qui viennent d'être énumérés, alors que W, en dehors de ρ_1, ρ_2, ζ_1, ζ_2, renfermait les *dix arguments* ξ_1, η_1, ξ_2, η_2, p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2.

(1) M. DARBOUX, *Leçons*, T. II, p. 363, p. 378-379, nos 495 et 503 donne des formules identiques ou équivalentes ; nous représentons par $\Delta^2\mathcal{D}$, $\Delta^2\mathcal{D}'$, $\Delta^2\mathcal{D}''$ les quantités que M. DARBOUX désigne par D, D', D''.

Nous devons nous arrêter sur ce point important qui, en définitive, résulte de la considération de l'une des équations auxquelles M. Darboux donne le nom d'équations de Codazzi, savoir $p_1r_2 - q_1\xi_2 - p_2\eta_1 + q_2\xi_1 = 0$, et étudier les équations de la statique de la surface déformable, dans le cas où nous nous plaçons.

La fonction W_0' se déduisant de W^0 par la substitution des valeurs de p_1, q_1, p_2, q_2,

$$p_1 = \xi_1\mathfrak{D}' - \xi_2\mathfrak{D}, \qquad q_1 = \eta_1\mathfrak{D}' - r_2\mathfrak{D},$$
$$p_2 = \xi_1\mathfrak{D}'' - \xi_2\mathfrak{D}', \qquad q_2 = \eta_1\mathfrak{D}'' - \eta_2\mathfrak{D}',$$

il en résulte que l'on a :

$$\frac{\partial W_0'}{\partial \xi_1} = \frac{\partial W^0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial W^0}{\partial p_1}\mathfrak{D}' + \frac{\partial W^0}{\partial p_2}\mathfrak{D}'', \qquad \frac{\partial W_0'}{\partial \xi_2} = \frac{\partial W^0}{\partial \xi_2} - \frac{\partial W^0}{\partial p_1}\mathfrak{D} - \frac{\partial W^0}{\partial p_2}\mathfrak{D}',$$
$$\frac{\partial W_0'}{\partial \eta_1} = \frac{\partial W^0}{\partial \eta_1} + \frac{\partial W^0}{\partial q_1}\mathfrak{D}' + \frac{\partial W^0}{\partial q_2}\mathfrak{D}'', \qquad \frac{\partial W_0'}{\partial \eta_2} = \frac{\partial W^0}{\partial \eta_2} - \frac{\partial W^0}{\partial q_1}\mathfrak{D} - \frac{\partial W^0}{\partial q_2}\mathfrak{D}',$$
$$\frac{\partial W_0'}{\partial r_1} = \frac{\partial W^0}{\partial r_1}, \qquad \frac{\partial W_0'}{\partial r_2} = \frac{\partial W^0}{\partial r_2},$$
$$\frac{\partial W_0'}{\partial \mathfrak{D}} = -\frac{\partial W^0}{\partial p_1}\xi_2 - \frac{\partial W^0}{\partial q_1}\eta_2, \qquad \frac{\partial W_0'}{\partial \mathfrak{D}''} = \xi_1\frac{\partial W^0}{\partial p_2} + \eta_1\frac{\partial W^0}{\partial q_2},$$
$$\frac{\partial W_0'}{\partial \mathfrak{D}'} = \xi_1\frac{\partial W^0}{\partial p_1} - \xi_2\frac{\partial W^0}{\partial p_2} + \eta_1\frac{\partial W^0}{\partial q_1} - \eta_2\frac{\partial W^0}{\partial q_2},$$

en continuant de désigner par W^0 le résultat de la substitution de p_1, p_2, q_1, q_2.

Supposons qu'on introduise, dans ces formules, les expressions des lettres au moyen de m, $\frac{\partial m}{\partial \rho_1}$, ... et que l'on tienne compte des (42). Observons que les formules

$$C_1' = \Delta_0\frac{\partial W}{\partial \zeta_1}, \qquad C_2' = \Delta_0\frac{\partial W}{\partial \zeta_2}$$

ne permettront pas de calculer C_1', C_2' si W est caché, car il faut tenir compte des (42) ; mais les autres formules donneront les autres expressions A_1', ..., au moyen des valeurs des dérivées de W^0 ; on a, en effet, par exemple :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p_1}\right)_{\zeta_1=0,\ \zeta_2=0} = \frac{\partial W^0}{\partial p_1}.$$

Les neuf formules que nous venons d'écrire donnent donc actuellement :

$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \xi_1} = A_1' + \mathfrak{D}'P_1' + \mathfrak{D}''P_2', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \xi_2} = A_2' - \mathfrak{D}P_1' - \mathfrak{D}'P_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \eta_1} = B_1' + \mathfrak{D}'Q_1' + \mathfrak{D}''Q_2', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \eta_2} = B_2' - \mathfrak{D}Q_1' - \mathfrak{D}'Q_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_1} = R_1', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_2} = R_2'.$$
$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathfrak{D}} = -\xi_2P_1' - \eta_2Q_1', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathfrak{D}''} = \xi_1P_2' + \eta_1Q_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathfrak{D}'} = \xi_1P_1' + \eta_1Q_1' - \xi_2P_2' - \eta_2Q_2',$$

où nous mettons W_0 au lieu de W_0' pour indiquer que l'on doit remplacer les arguments ξ_1, ... $\mathcal{D}''$ par leurs valeurs en fonction de m, $\frac{\partial m}{\partial \rho_1}$, ...

Nous n'avons plus, pour calculer les dix auxiliaires A_1', ..., autres que C_1', C_2', que neuf équations, lorsque la fonction W_0 est seule connue ; il restera donc, en définitive, *lorsque* W_0 *sera seul connu*, trois arbitraires.

Pour étudier le système des équations de la statique de la surface déformable, appliquons au trièdre $Mx'y'z'$ les formules relatives au trièdre $Mx_1'y_1'z_1'$, dans lesquelles figurent les auxiliaires définies par les formules :

$$\mathcal{A}_1' = \xi_2 A_1' + \eta_2 B_1', \qquad \mathcal{A}_2' = \xi_2 A_2' + \eta_2 B_2',$$
$$\mathcal{B}_1' = \xi_1 A_1' + \eta_1 B_1', \qquad \mathcal{B}_2' = \xi_1 A_2' + \eta_1 B_2',$$

et par les quatre analogues pour $\mathcal{X}_1'$, $\mathcal{Q}_1'$, $\mathcal{X}_2'$, $\mathcal{Q}_2'$; les neuf formules précédentes s'écrivent :

$$\Delta_0\left(\xi_2\frac{\partial W_0}{\partial \xi_1}+\eta_2\frac{\partial W_0}{\partial \eta_1}\right)=\mathcal{A}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{X}_2', \quad \Delta_0\left(\xi_2\frac{\partial W_0}{\partial \xi_2}+\eta_2\frac{\partial W_0}{\partial \eta_2}\right)=\mathcal{A}_2'-\mathcal{D}\mathcal{X}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{X}_2',$$

$$\Delta_0\left(\xi_1\frac{\partial W_0}{\partial \xi_1}+\eta_1\frac{\partial W_0}{\partial \eta_1}\right)=\mathcal{B}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Q}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{Q}_2', \quad \Delta_0\left(\xi_1\frac{\partial W_0}{\partial \xi_2}+\eta_1\frac{\partial W_0}{\partial \eta_2}\right)=\mathcal{B}_2'-\mathcal{D}\mathcal{Q}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{Q}_2',$$

$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_1}=R_1', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_2}=R_2',$$

$$\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathcal{D}}=-\mathcal{X}_1', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathcal{D}'}=\mathcal{Q}_1'-\mathcal{X}_2', \qquad \Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial \mathcal{D}''}=\mathcal{Q}_2'.$$

Considérons les six équations d'équilibre données au § 38 ; les deux premières du second groupe donnent $\Delta C_1'$ et $\Delta C_2'$:

$$\Delta C_1' = \frac{\partial \mathcal{X}_1'}{\partial \rho_1}+\frac{\partial \mathcal{X}_2'}{\partial \rho_2}-\Sigma_2\mathcal{X}_1'-\Sigma_3\mathcal{X}_2'-\theta_2\mathcal{Q}_1'-\theta_3\mathcal{Q}_2'-\Delta\mathcal{D}'R_1'-\Delta\mathcal{D}''R_2'-\Delta_0(\xi_2L_0'+\eta_2M_0')$$

$$-\Delta C_2' = \frac{\partial \mathcal{Q}_1'}{\partial \rho_1}+\frac{\partial \mathcal{Q}_2'}{\partial \rho_2}-\Sigma_1\mathcal{X}_1'-\Sigma_2\mathcal{X}_2'-\theta_1\mathcal{Q}_1'-\theta_2\mathcal{Q}_2'-\Delta\mathcal{D}R_1'-\Delta\mathcal{D}'R_2'-\Delta_0(\xi_1L_0'+\eta_1M_0')$$

Portons ces valeurs dans les trois équations du premier groupe ; écrivons la troisième équation du second groupe, et il nous reste le système :

$$U_2=\frac{\partial}{\partial \rho_1}(\mathcal{A}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{X}_2')+\frac{\partial}{\partial \rho_2}(\mathcal{A}_2'-\mathcal{D}\mathcal{X}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{X}_2')+\mathcal{D}\frac{\partial \mathcal{X}_1'}{\partial \rho_2}-2\mathcal{D}'\frac{\partial \mathcal{X}_1'}{\partial \rho_2}$$
$$+\mathcal{D}''\frac{\partial \mathcal{Q}_2'}{\partial \rho_2}+\mathcal{D}''\frac{\partial}{\partial \rho_1}(\mathcal{Q}_1'-\mathcal{X}_2')-\Sigma_2(\mathcal{A}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{X}_2')-\Sigma_3(\mathcal{A}_2'-\mathcal{D}\mathcal{X}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{X}_2')$$
$$-\theta_2(\mathcal{B}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Q}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{Q}_2')-\theta_3(\mathcal{B}_2'-\mathcal{D}\mathcal{Q}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{Q}_2')+2(2\Sigma_2\mathcal{D}'-\Sigma_1\mathcal{D}''-\Sigma_3\mathcal{D})\mathcal{X}_1'$$
$$-(\theta_3\mathcal{D}-2\theta_2\mathcal{D}'+\theta_1\mathcal{D}'')(\mathcal{Q}_1'-\mathcal{X}_2')-\Delta(\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2)R_1'-\Delta_0(\xi_2X_0'+\eta_2Y_0')$$
$$+\Delta_0\mathcal{D}'(\xi_2L_0'+\eta_2M_0')-\Delta_0\mathcal{D}''(\xi_1L_0'+\eta_1M_0')=0,$$

$$U_1=\frac{\partial}{\partial \rho_1}(\mathcal{B}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Q}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{Q}_2')+\frac{\partial}{\partial \rho_2}(\mathcal{B}_2'-\mathcal{D}\mathcal{Q}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{Q}_2')+\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial \rho_2}(\mathcal{Q}_1'-\mathcal{X}_2')$$
$$+2\mathcal{D}'\frac{\partial \mathcal{Q}_2'}{\partial \rho_2}-\mathcal{D}''\frac{\partial \mathcal{Q}_2'}{\partial \rho_1}-\mathcal{D}\frac{\partial \mathcal{X}_1'}{\partial \rho_1}-\Sigma_1(\mathcal{A}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{X}_2')-\Sigma_2(\mathcal{A}_2'-\mathcal{D}\mathcal{X}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{X}_2')$$
$$-\theta_1(\mathcal{B}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Q}_1'+\mathcal{D}''\mathcal{Q}_2')-\theta_2(\mathcal{B}_2'-\mathcal{D}\mathcal{Q}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{Q}_2')+2(-2\theta_2\mathcal{D}'+\theta_1\mathcal{D}''+\theta_3\mathcal{D})\mathcal{Q}_2$$
$$+(2\Sigma_2\mathcal{D}'-\Sigma_1\mathcal{D}''-\Sigma_3\mathcal{D})(\mathcal{Q}_1'-\mathcal{X}_2')+\Delta(\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2)R_2'-\Delta_0(\xi_1X_0'+\eta_1Y_0')$$
$$+\Delta_0\mathcal{D}(\xi_2L_0'+\eta_2M_0')-\Delta_0\mathcal{D}'(\xi_1L_0'+\eta_1M_0')=0,$$

$$V=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\mathfrak{X}_1^2{}'}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial^2(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}-\frac{\partial^2\mathfrak{Q}_2'}{\partial\rho_2^2}\right)-\frac{\theta_1+2\Sigma_2}{\Delta}\frac{\partial\mathfrak{X}_1'}{\partial\rho_1}+\frac{\Sigma_1}{\Delta}\frac{\partial\mathfrak{X}_1'}{\partial\rho_2}+\frac{\Sigma_3}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')$$
$$+\frac{\theta_1}{\Delta}\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')-\frac{\theta_3}{\Delta}\frac{\partial\mathfrak{Q}_2'}{\partial\rho_1}+\frac{2\theta_2+\Sigma_3}{\Delta}\frac{\partial\mathfrak{Q}_2'}{\partial\rho_2}+\left[\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\Sigma_1}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\Sigma_2}{\Delta}+\frac{\mathcal{E}}{\Delta}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2)\right]\mathfrak{X}_1'$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\theta_1}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\theta_2}{\Delta}-\frac{\mathcal{F}}{\Delta}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2)\right](\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')+\left[\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\theta_2}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\theta_3}{\Delta}-\frac{\mathcal{G}}{\Delta}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2\right]\mathfrak{Q}_2'$$
$$+\frac{\mathcal{E}\mathfrak{D}'-\mathcal{F}\mathfrak{D}}{\Delta}(\mathfrak{A}_1'+\mathfrak{D}'\mathfrak{X}_1'+\mathfrak{D}''\mathfrak{X}_2')+\frac{\mathcal{G}\mathfrak{D}-\mathcal{F}\mathfrak{D}'}{\Delta}(\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}_1'+\mathfrak{D}''\mathfrak{Q}_2')$$
$$+\frac{\mathcal{E}\mathfrak{D}''-\mathcal{F}\mathfrak{D}'}{\Delta}(\mathfrak{A}_2'-\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1'-\mathfrak{D}'\mathfrak{X}_2')+\frac{\mathcal{G}\mathfrak{D}'-\mathcal{F}\mathfrak{D}''}{\Delta}(\mathfrak{B}_2'-\mathfrak{D}\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{D}'\mathfrak{Q}_2')$$
$$-\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\mathfrak{D}'R_1'+\mathfrak{D}''R_2')+\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\mathfrak{D}R_1'+\mathfrak{D}'R_2')-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\frac{\Delta_0}{\Delta}(\xi_2L_0'+\eta_2M_0')\right]$$
$$+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left[\frac{\Delta_0}{\Delta}(\xi_1L_0'+\eta_1M_0')\right]-\Delta_0Z_0'=0,$$

$$W=\frac{\partial R_1'}{\partial\rho_1}+\frac{\partial R_2'}{\partial\rho_2}+\frac{\mathcal{E}}{\Delta}(\mathfrak{A}_1'+\mathfrak{D}'\mathfrak{X}_1'+\mathfrak{D}''\mathfrak{X}_2')$$
$$+\frac{\mathcal{F}}{\Delta}[\mathfrak{A}_2'-\mathfrak{D}\mathfrak{X}_1'-\mathfrak{D}'\mathfrak{X}_2'-(\mathfrak{B}_1'+\mathfrak{D}'\mathfrak{Q}_1'+\mathfrak{D}''\mathfrak{Q}_2')]-\frac{\mathcal{G}}{\Delta}(\mathfrak{B}_2'-\mathfrak{D}\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{D}'\mathfrak{Q}_2')-\Delta_0N_0''=0,$$

en remarquant, pour la formation des trois premières équations, que les équations de Codazzi sont, avec nos notations actuelles (1),

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}''-\mathfrak{D}'^2=\mathcal{K},$$
$$\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial\rho_1}+\Sigma_3\mathfrak{D}-2\Sigma_2\mathfrak{D}'+\Sigma_1\mathfrak{D}''=0,$$
$$\frac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial\rho_2}+\theta_3\mathfrak{D}-2\theta_2\mathfrak{D}'+\theta_1\mathfrak{D}''=0,$$

en désignant par $\mathcal{K}$ l'expression formée uniquement au moyen de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ et de leurs dérivées premières et secondes, qui représente la courbure totale de la surface, et en remarquant aussi que

$$\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_1}=\theta_1+\Sigma_2,\qquad\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_2}=\theta_2+\Sigma_3,$$

et que, par suite, en égalant les deux valeurs de $\frac{\partial^2\log\Delta}{\partial\rho_1\partial\rho_2}$,

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_2}=\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\rho_1},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\Sigma_2}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\Sigma_3}{\Delta}=-\left(\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\theta_1}{\Delta}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\theta_2}{\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_2}-\theta_2\Sigma_2+\theta_1\Sigma_3\right)$$
$$=\frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\rho_1}-\theta_2\Sigma_2+\theta_1\Sigma_3\right).$$

(1) Ces équations se déduisent immédiatement de celles données T. III, p. 246, 248, des *Leçons* de M. Darboux, en effectuant le changement de notations et en observant que

$$\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_1}=\theta_1+\Sigma_2,\qquad\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_2}=\theta_2+\Sigma_3.$$

46. Réduction du système du § précédent à une forme analogue à celle qui se présente dans le calcul des variations. — Il résulte du calcul précédent, ce qui est aussi une conséquence *a priori* des considérations habituelles au calcul des variations, lorsque les expressions des forces et des moments extérieurs ont des formes données particulières, que les auxiliaires $A_1', \ldots$, ou, ce qui revient au même, les auxiliaires $\mathfrak{A}_1', \ldots$, s'éliminent toutes quoique leur nombre soit supérieur d'une unité à celui des équations.

Nous allons mettre les équations, résultant de cette élimination, sous la forme que l'on pourrait déduire du calcul des variations, dans le cas où les expressions des forces et moments extérieurs sont données sous une forme particulière.

Commençons par remplacer dans W_0 les arguments $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ en fonction des arguments $m, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, par leurs expressions déduites des formules :

$$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \operatorname{tg} m, \qquad \xi_1^2 + \eta_1^2 = \mathcal{E}, \qquad \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 = \mathcal{F}, \qquad \xi_2^2 + \eta_2^2 = \mathcal{G},$$

auxquelles nous adjoignons la formule déjà utilisée :

$$\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 = \Delta,$$

qui ne fait que préciser le signe de ξ_2, η_2.

Nous déduisons de là :

$$\xi_1 = \sqrt{\mathcal{E}}\cos m, \qquad \xi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\cos m - \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{E}}}\sin m,$$

$$\eta_1 = \sqrt{\mathcal{E}}\sin m, \qquad \eta_2 = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\sin m + \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{E}}}\cos m,$$

en désignant par $\sqrt{\mathcal{E}}$ une détermination du radical.

En désignant, pour un instant, par $[W_0]$ la fonction de ρ_1, ρ_2 et de $m, \mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, r_1, r_2, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ ainsi obtenue, nous avons les relations :

$$\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{E}} = \frac{1}{2\mathcal{E}}\left(\xi_1\frac{\partial W_0}{\partial\xi_1} + \eta_1\frac{\partial W_0}{\partial\eta_1}\right) - \frac{1}{2\mathcal{E}}\left(\xi_2\frac{\partial W_0}{\partial\xi_2} + \eta_2\frac{\partial W_0}{\partial\eta_2}\right) + \frac{\mathcal{G}}{2\mathcal{E}\Delta}\left(\xi_1\frac{\partial W_0}{\partial\eta_2} - \eta_1\frac{\partial W_0}{\partial\xi_2}\right),$$

$$\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}} = \frac{1}{\Delta}\left(\eta_2\frac{\partial W_0}{\partial\xi_2} - \xi_2\frac{\partial W_0}{\partial\eta_2}\right),$$

$$\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{G}} = \frac{1}{2\Delta}\left(\xi_1\frac{\partial W_0}{\partial\eta_2} - \eta_1\frac{\partial W_0}{\partial\xi_2}\right),$$

$$\frac{\partial[W_0]}{\partial m} = \xi_1\frac{\partial W_0}{\partial\eta_1} - \eta_1\frac{\partial W_0}{\partial\xi_1} + \xi_2\frac{\partial W_0}{\partial\eta_2} - \eta_2\frac{\partial W_0}{\partial\xi_2}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$a_1' = \mathfrak{A}_1' + \mathfrak{D}'\mathfrak{X}_1' + \mathfrak{D}''\mathfrak{X}_2', \qquad a_2' = \mathfrak{A}_2' - \mathfrak{D}\mathfrak{X}_1' - \mathfrak{D}'\mathfrak{X}_2',$$
$$b_1' = \mathfrak{B}_1' + \mathfrak{D}'\mathfrak{Y}_1' + \mathfrak{D}''\mathfrak{Y}_2', \qquad b_2' = \mathfrak{B}_2' - \mathfrak{D}\mathfrak{Y}_1' - \mathfrak{D}'\mathfrak{Y}_2';$$

nous avons les relations :

$$\xi_1\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_1} + \eta_1\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_1} = b_1', \qquad \xi_1\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_2} + \eta_1\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_2} = b_2',$$

$$\xi_2\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_1} + \eta_2\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_1} = a_1', \qquad \xi_2\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_2} + \eta_2\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_2} = a_2',$$

d'où nous déduisons les expressions suivantes des dérivées de $(W_0\Delta_0)$:

$$\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_1}=\frac{\eta_2 b_1'-\eta_1 a_1'}{\Delta},\qquad \frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\xi_2}=\frac{\eta_2 b_2'-\eta_1 a_2'}{\Delta},$$
$$\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_1}=\frac{\xi_1 a_1'-\xi_2 b_1'}{\Delta},\qquad \frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\eta_2}=\frac{\xi_1 a_2'-\xi_2 b_2'}{\Delta},$$

qui nous permettront de calculer, au moyen de a_1', b_1', a_2', b_2', les différentes combinaisons formées avec les dérivées de $(W_0\Delta_0)$. Nous obtenons ainsi :

$$\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{E}}=\frac{1}{2\mathcal{E}}b_1'-\frac{1}{2\mathcal{E}}a_2'+\frac{\mathcal{G}}{2\mathcal{E}\Delta}\left(-\frac{\mathcal{F}}{\Delta}b_2'+\frac{\mathcal{E}}{\Delta}a_2'\right)=\frac{1}{2\mathcal{E}}b_1'+\frac{\mathcal{F}^2}{2\mathcal{E}\Delta^2}a_2'-\frac{\mathcal{F}\mathcal{G}}{2\mathcal{E}\Delta^2}b_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}}=-\frac{\mathcal{F}}{\Delta^2}a'_2+\frac{\mathcal{G}}{\Delta^2}b_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{E}}=\frac{\mathcal{E}}{2\Delta^2}a_2'-\frac{\mathcal{F}}{2\Delta^2}b_2',$$
$$\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial m}=\frac{\mathcal{E}}{\Delta}a_1'+\frac{\mathcal{F}}{\Delta}(a_2'-b_1')-\frac{\mathcal{G}}{\Delta}b_2',$$

d'où l'on déduit :

$$a_1'=\frac{\Delta}{\mathcal{E}}\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial m}+2\mathcal{F}\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{E}}+\mathcal{G}\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}},$$
$$b_1'=2\mathcal{E}\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{E}}+\mathcal{F}\Delta_0\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}},$$
$$a_2'=\Delta\Delta_0\left\{\mathcal{F}\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}}+2\mathcal{G}\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{G}}\right\},$$
$$b_2'=\Delta\Delta_0\left\{\mathcal{E}\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{F}}+2\mathcal{F}\frac{\partial[W_0]}{\partial\mathcal{G}}\right\},$$

de sorte que, si nous désignons par W_0 la fonction $[W_0]$, les *dix* auxiliaires autres que C_1', C_2' sont définies par les *neuf* formules suivantes :

$$\mathcal{A}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{X}_2'=\frac{\Delta}{\mathcal{E}}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial m}+2\mathcal{F}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{E}}+\mathcal{G}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{F}},$$
$$\mathcal{B}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Y}_1'+\mathcal{D}'\mathcal{Y}_2'=2\mathcal{E}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{E}}+\mathcal{F}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{F}},$$
$$\mathcal{A}_2'-\mathcal{D}\mathcal{X}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{X}_2'=\Delta\left\{\mathcal{F}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{F}}+2\mathcal{G}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{G}}\right\},$$
$$\mathcal{B}_2'-\mathcal{D}\mathcal{Y}_1'-\mathcal{D}'\mathcal{Y}_2'=\Delta\left\{\mathcal{E}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{F}}+2\mathcal{F}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\mathcal{G}}\right\},$$
$$C_1'=\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_1},\qquad C_2'=\Delta_0\frac{\partial W_0}{\partial r_2}.$$

Définissons les cosinus directeurs γ, γ', γ'' de la normale Mz' à (M) par les formules :

$$\gamma=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(y,z)}{\partial(\rho_1,\rho_2)},\qquad \gamma'=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(z,x)}{\partial(\rho_1,\rho_2)},\qquad \gamma''=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho_1,\rho_2)}.$$

Nous avons d'abord l'identité suivante, dans laquelle nous introduisons, au lieu des dérivées de W_0, les notations que nous venons d'indiquer à l'instant,

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1^2}}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_1\partial\rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\frac{\partial^2 x}{\partial\rho_2^2}}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}-\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_2}}$$

$$+\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial x}=-\left\{\frac{\partial^2\left(\frac{\gamma}{\Delta}\mathfrak{X}_1'\right)}{\partial\rho_1^2}-\frac{\partial^2\left[\frac{\gamma}{\Delta}(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')\right]}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-\frac{\partial^2\left(\frac{\gamma}{\Delta}\mathfrak{Q}_2'\right)}{\partial\rho_2^2}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathfrak{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\mathfrak{E}\Delta}C_1'\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathfrak{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\mathfrak{E}\Delta}C_2'\right)\right\}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left\{\left(\frac{b_1'}{\mathfrak{E}}+\frac{\mathfrak{F}^2a_2'}{\mathfrak{E}\Delta^2}-\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{G}b_2'}{\mathfrak{E}\Delta^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\left(-\frac{\mathfrak{F}a_2'}{\Delta^2}+\frac{\mathfrak{G}b_2'}{\Delta^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\right.$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathfrak{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\mathfrak{E}\Delta}\right)-\mathfrak{D}'\gamma\right]C_1'+\left[\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathfrak{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\mathfrak{E}\Delta}\right)-\mathfrak{D}'\gamma\right]C_2'$$

$$-\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}\mathfrak{X}_1'+\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')+\frac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_1}}\mathfrak{Q}_2'\Big\}-\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big\{\left(-\frac{\mathfrak{F}a_2'}{\Delta^2}+\frac{\mathfrak{G}b_2'}{\Delta^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\rho_1}$$

$$+\left(\frac{\mathfrak{E}a_2'}{\Delta^2}-\frac{\mathfrak{F}b_2'}{\Delta^2}\right)\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathfrak{D}\gamma C_1'+\mathfrak{D}'\gamma C_2'-\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_2}}\mathfrak{X}_1'$$

$$+\frac{\partial\mathfrak{D}'}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_2}}(\mathfrak{Q}_1'-\mathfrak{X}_2')+\frac{\partial\mathfrak{D}''}{\partial\frac{\partial x}{\partial\rho_2}}\mathfrak{Q}_2'\Big\}.$$

Pour obtenir cette identité, sous la forme que nous venons d'écrire, nous avons utilisé les relations (1) ;

$$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\rho_1}=2(\mathfrak{E}\Theta_1+\mathfrak{F}\Sigma_1),\qquad \frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\rho_2}=2(\mathfrak{E}\Theta_2+\mathfrak{F}\Sigma_2),$$

$$2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\rho_2}-\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\rho_1}=2(\mathfrak{E}\Theta_3+\mathfrak{F}\Sigma_3),\qquad 2\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial\rho_1}-\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial\rho_2}=2(\mathfrak{F}\Theta_1+\mathfrak{G}\Sigma_1),$$

$$\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\rho_1}=2(\mathfrak{F}\Theta_2+\mathfrak{G}\Sigma_2),\qquad \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\rho_2}=2(\mathfrak{F}\Theta_3+\mathfrak{G}\Sigma_3),$$

qui, résolues, donnent les valeurs des symboles de Christoffel Σ_1, Σ_2, Σ_3, Θ_1, Θ_2, Θ_3, ou inversement les valeurs des six dérivées de $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, et permet-

(1) Nous avons aussi continué à utiliser $\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_1}=\Theta_1+\Sigma_2$, $\frac{\partial\log\Delta}{\partial\rho_2}=\Theta_2+\Sigma_3$.

tent d'éliminer ces dérivées de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; nous avons aussi utilisé les relations (1) :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2} = \theta_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \Sigma_1 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{D}\Delta\gamma,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} = \theta_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \Sigma_2 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{D}'\Delta\gamma,$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_2^2} = \theta_3 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \Sigma_3 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{D}''\Delta\gamma,$$

qui permettent d'éliminer les dérivées secondes de x, y, z et qui donnent lieu à deux séries de formules analogues obtenues en remplaçant x, γ par y, γ' et z, γ'', les cosinus directeurs γ', γ'' étant définis par des formules qui se déduisent par permutation circulaire de celle relative à γ.

Considérons les différentes expressions qui se sont présentées dans le calcul précédent.

Soit d'abord

$$\frac{\partial r_1}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} = \frac{\partial \frac{\Sigma_1 \Delta}{\mathcal{E}}}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} = \frac{\partial}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} \left(\frac{-\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_2} + 2\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_1}}{2\Delta\mathcal{E}} \right)$$

$$= -\frac{2\Delta\Sigma_1}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \frac{\Sigma_1}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{G}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right) + \frac{-\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_2} + 2\frac{\partial x}{\partial \rho_1}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2}}{\Delta\mathcal{E}}$$

$$= -\frac{2\Delta\Sigma_1}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \frac{\Sigma_1}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{G}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right) + \frac{2\frac{\partial x}{\partial \rho_1}(\mathcal{F}\theta_1 + \mathcal{G}\Sigma_1) - \frac{\partial x}{\partial \rho_2}(\mathcal{E}\theta_1 + \mathcal{F}\Sigma_1) - \mathcal{F}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2}}{\Delta\mathcal{E}};$$

on a d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta\mathcal{E}} = \frac{\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{E}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1 \partial \rho_2} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho_1}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho_1^2}}{\Delta\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta\mathcal{E}^2}\left[\mathcal{E}(\theta_1 + \Sigma_2) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_1}\right]$$

$$= \frac{2\frac{\partial x}{\partial \rho_2}(\mathcal{E}\theta_1 + \mathcal{F}\Sigma_1) + \mathcal{E}\left(\theta_2\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \Sigma_2\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{D}'\Delta\gamma\right) - \frac{\partial x}{\partial \rho_1}(\mathcal{F}\theta_1 + \mathcal{G}\Sigma_1 + \mathcal{E}\theta_2 + \mathcal{F}\Sigma_2) - \mathcal{F}\frac{\partial^2 x}{\partial \rho^{\infty}}}{\Delta\mathcal{E}}$$

$$- \frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta\mathcal{E}^2}[\mathcal{E}(\theta_1 + \Sigma_2) + 2(\mathcal{E}\theta_1 + \mathcal{F}\Sigma_1)],$$

d'où résulte :

$$\frac{\partial \frac{\Sigma_1 \Delta}{\mathcal{E}}}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} - \frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta\mathcal{E}} = -\mathcal{D}'\gamma.$$

(1) DARBOUX. — *Leçons*, T. III, n° 702, p. 251.

On a de même

$$\frac{\partial r_2}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}=\frac{\partial\dfrac{\Delta\Sigma_2}{\mathcal{E}}}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}=\frac{\partial}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}\left(\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial\mathcal{C}_{\mathcal{J}}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}}{2\Delta\mathcal{E}}\right)$$

$$=-\frac{2\Sigma_2\Delta}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}-\frac{\Sigma_2}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial\mathcal{C}_{\mathcal{J}}}{\partial\rho_1}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}{\Delta\mathcal{E}}$$

$$=-\frac{2\Sigma_2\Delta}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}-\frac{\Sigma_2}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{C}_{\mathcal{J}}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\right)+\frac{2\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathcal{F}\Theta_2+\mathcal{C}_{\mathcal{J}}\Sigma_2)-\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathcal{E}\Theta_2+\mathcal{F}\Sigma_2)-\mathcal{F}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}{\Delta\mathcal{E}};$$

mais d'autre part

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}}=\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathcal{E}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_2^2}-\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_2}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}{\Delta\mathcal{E}}-\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}^2}\left[\mathcal{E}(\Theta_2+\Sigma_3)+\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}\right]$$

$$=\frac{2\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}(\mathcal{E}\Theta_2+\mathcal{F}\Sigma_2)+\mathcal{E}(\theta_3\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}+\Sigma_3\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathcal{D}''\Delta\gamma)-\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathcal{E}\Theta_3+\mathcal{F}\Sigma_3+\mathcal{F}\Theta_2+\mathcal{C}_{\mathcal{J}}\Sigma_2)-\mathcal{F}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}{\Delta\mathcal{E}}$$

$$-\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}^2}[\mathcal{E}(\Theta_2+\Sigma_3)+2(\mathcal{E}\Theta_2+\mathcal{F}\Sigma_2)],$$

d'où résulte

$$\frac{\partial\dfrac{\Sigma_2\Delta}{\mathcal{E}}}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}-\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}}=-\mathcal{D}''\gamma.$$

On a encore :

$$\frac{\partial r_1}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}=\frac{\partial\dfrac{\Delta\Sigma_1}{\mathcal{E}}}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}=\frac{\partial}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}\left(\frac{-\mathcal{E}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}+2\mathcal{E}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_1}}{2\Delta\mathcal{E}}\right)$$

$$=-\frac{\Sigma_1}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_1}}{\mathcal{E}\Delta}$$

$$=-\frac{\Sigma_1}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\mathcal{E}(\theta_1\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}+\Sigma_1\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathcal{D}\Delta\gamma)-\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathcal{E}\Theta_1+\mathcal{F}\Sigma_1)}{\Delta\mathcal{E}}=\mathcal{D}\gamma,$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}=\frac{\partial\dfrac{\Delta\Sigma_2}{\mathcal{E}}}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}=\frac{\partial}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}\left(\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial\mathcal{C}_{\mathcal{J}}}{\partial\rho_1}-\mathcal{F}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}}{2\Delta\mathcal{E}}\right)$$

$$=-\frac{\Sigma_2}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial^2x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_2}}{\Delta\mathcal{E}}$$

$$=-\frac{\Sigma_2}{\Delta\mathcal{E}}\left(\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\mathcal{E}(\theta_2\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}+\Sigma_2\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathcal{D}'\Delta\gamma)-\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathcal{E}\Theta_2+\mathcal{F}\Sigma_2)}{\Delta\mathcal{E}}=\mathcal{D}'\gamma.$$

Modifions l'identité que nous avons obtenue et qui nous en donnera deux analogues en remplaçant x, γ par y, γ', puis par z, γ''.

Nous allons développer les parenthèses de façon à mettre en évidence les premiers membres des équations de la statique de la surface déformable, abstraction faite des forces ; nous utiliserons à cet effet les relations (1) :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_1} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D}}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}'}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \rho_2},$$
$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho_2} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}'' - \mathcal{G}\mathcal{D}'}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{E}\mathcal{D}''}{\Delta}\frac{\partial x}{\partial \rho_2},$$

qui donnent lieu à deux systèmes analogues obtenus en remplaçant x, γ par y, γ' puis par z, γ'', et qui entraînent :

$$\frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial \rho_1} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D}}{\Delta^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}'}{\Delta^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \frac{\Theta_1 + \Sigma_2}{\Delta}\gamma,$$
$$\frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial \rho_2} = \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}'' - \mathcal{G}\mathcal{D}'}{\Delta^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{E}\mathcal{D}''}{\Delta^2}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \frac{\Theta_2 + \Sigma_3}{\Delta}\gamma,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial \rho_2} = -\mathcal{D}'\frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta^2} - \mathcal{D}\frac{\mathcal{G}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}}{\Delta^2} - \frac{\Theta_1 + \Sigma_2}{\Delta}\gamma,$$
$$\frac{\partial \frac{\gamma}{\Delta}}{\partial \rho_2} = -\mathcal{D}''\frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta^2} - \mathcal{D}'\frac{\mathcal{G}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}}{\Delta^2} - \frac{\Theta_2 + \Sigma_3}{\Delta}\gamma.$$

Nous arrivons ainsi à constater que, si l'on désigne par U_2, U_1, V, $\mathfrak{W}$ les premiers membres des équations de la statique de la surface déformable, l'expression que nous venons de considérer reproduit tous les termes indépendants des forces et moments extérieurs, qui figurent dans :

$$-\gamma V - \frac{\mathcal{G}\frac{\partial x}{\partial \rho_1} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_2}}{\Delta^2}U_1 - \frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta^2}U_2 + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left\{\frac{\mathcal{E}\frac{\partial x}{\partial \rho_2} - \mathcal{F}\frac{\partial x}{\partial \rho_1}}{\Delta\mathcal{E}}\mathfrak{W}\right\}.$$

Le changement de x, γ, en y, γ', puis en z, γ'' donne deux résultats analogues.

D'autre part, l'équation $\mathfrak{W} = 0$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{(W_0\Delta_0)}{\partial \frac{\partial m}{\partial \rho_1}} + \frac{\partial}{\partial \rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial \frac{\partial m}{\partial \rho_2}} - \frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial m} + \Delta_0 N_0' = 0.$$

(1) Darboux. — *Leçons*, T. III, n° 698, p. 244-245.

On voit donc que si l'on pose :

$$\Delta_0\mathfrak{X}_0 = \Delta_0 X_0 + \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left[\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}\left(L_0\frac{\partial x}{\partial\rho_2} + M_0\frac{\partial y}{\partial\rho_2} + N_0\frac{\partial z}{\partial\rho_2}\right) - \frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2} - \mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}}\Delta_0 N_0'\right]$$
$$- \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left[\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}\left(L_0\frac{\partial x}{\partial\rho_1} + M_0\frac{\partial y}{\partial\rho_1} + N_0\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\right)\right],$$

et deux formules analogues obtenues en remplaçant $\mathfrak{X}_0$, X_0, x, γ respectivement par $\mathfrak{Y}_0$, Y_0, y, γ', puis par $\mathfrak{Z}_0$, Z_0, z, γ'' (en dehors de $L_0\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2} + \ldots$ et de $L_0\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1} + \ldots$), les équations de la statique de la surface déformable peuvent se résumer dans la relation suivante (1) :

$$\iint \delta(W_0\Delta_0)d\rho_1 d\rho_2 + \iint \Delta_0(\mathfrak{X}_0\delta x + \mathfrak{Y}_0\delta y + \mathfrak{Z}_0\delta z - N_0'\delta m)d\rho_1 d\rho_2 = 0,$$

où l'on n'a égard qu'aux termes qui, finalement, se présentent sous le signe d'intégrale double.

Le résultat précédent peut se généraliser ; supposons qu'on exprime ξ_1, η_1, ξ_2, η_2 en fonction de m, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ par les formules :

$$\xi_1 = \sqrt{\mathcal{E}}\cos(m+u), \qquad \xi_2 = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\cos(m+u) - \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{E}}}\sin(m+u),$$
$$\eta_1 = \sqrt{\mathcal{E}}\sin(m+u), \qquad \eta_2 = \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}}\sin(m+u) + \frac{\Delta}{\sqrt{\mathcal{E}}}\cos(m+u),$$

où u désigne une fonction quelconque des seules lettres $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; l'équation $\mathfrak{W}' = 0$ peut encore s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial m}{\partial\rho_1}} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial m}{\partial\rho_2}} - \frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial m} + \Delta_0 N_0' = 0$$

En formant la combinaison

$$-\gamma V - \frac{\mathcal{G}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1} - \mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}{\Delta^2}U_1 - \frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2} - \mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta^2}U_2$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\rho_1}\left\{\left[\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2} - \mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}} - \frac{\partial u}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}\right]\mathfrak{W}\right\} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}\left\{-\frac{\partial u}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}\mathfrak{W}\right\},$$

(1) Cette relation est analogue à la formule $\int_{t_0}^{t_1}(\delta T + U')dt = 0$ que Tisserand donne p. 4 du T. I de son *Traité de Mécanique céleste*, pour le principe d'Hamilton

et les deux analogues obtenues en remplaçant x, γ par y, γ', puis par z, γ'', on trouve trois équations dont la première est :

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho_1^2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial^2 x}{\partial\rho_1^2}}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_1\partial\rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial^2 x}{\partial\rho_1\partial\rho_2}}+\frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial^2 x}{\partial\rho_2^2}}-\frac{\partial}{\partial\rho_1}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}-\frac{\partial}{\partial\rho_2}\frac{\partial(W_0\Delta_0)}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}+\Delta_0\mathfrak{X}_0=0,$$

en posant :

$$\Delta_0\mathfrak{X}_0=\Delta_0 X_0+\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left\{\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}\left(L_0\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+M_0\frac{\partial y}{\partial\rho_2}+N_0\frac{\partial z}{\partial\rho_2}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}-\frac{\mathcal{E}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}-\mathcal{F}\dfrac{\partial x}{\partial\rho_1}}{\Delta\mathcal{E}}\right)\Delta_0 N_0'\right\}$$
$$-\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left\{\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}\left(L_0\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+M_0\frac{\partial y}{\partial\rho_1}+N_0\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\right)-\frac{\partial u}{\partial\dfrac{\partial x}{\partial\rho_2}}\Delta_0 N_0'\right\}.$$

es quatre équations peuvent se résumer dans

$$\iint_{c_0}\left\{\delta(W_0\Delta_0)+\Delta_0(\mathfrak{X}_0\delta x+\mathfrak{Y}_0\delta y+\mathfrak{Z}_0\delta z-N_0'\delta m)\right\}d\rho_1 d\rho_2=0,$$

où l'on n'a égard qu'aux termes qui, finalement, se présentent sous le signe d'intégrale double.

La forme résumée à laquelle on vient de parvenir, et qui doit être traitée suivant les règles du calcul des variations, est particulièrement commode pour effectuer les changements de variables.

En supposant les expressions $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$, N_0' de forme particulière, on aura les équations des extrémales d'un problème du calcul des variations.

Plaçons-nous dans le cas particulier (1) où $W_0\Delta_0$ ne dépend pas de r_1, r_2 et ne dépend de ξ_1, ξ_2, η_1, η_2 que par l'intermédiaire de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$; ceci revient à dire que l'expression finale de $W_0\Delta_0$ ne dépend pas de m, $\dfrac{\partial m}{\partial\rho_1}$, $\dfrac{\partial m}{\partial\rho_2}$, est une fonction de ρ_1, ρ_2 et des six fonctions

$$\mathcal{E},\ \mathcal{F},\ \mathcal{G},\ \mathcal{D},\ \mathcal{D}',\ \mathcal{D}''$$

des dérivées premières et secondes de x, y, z.

Supposons en outre que $N_0'=0$; si $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ ne dépendent pas de m, nous avons finalement trois équations relatives seulement à x, y, z, qui peuvent se résumer dans la formule :

$$\iint_{c_0}\delta(W_0\Delta_0)d\rho_1 d\rho_2+\iint_{c_0}\Delta_0(\mathfrak{X}_0\delta x+\mathfrak{Y}_0\delta y+\mathfrak{Z}_0\delta z)d\rho_1 d\rho_2=0.$$

(1) Ce qui va suivre peut s'appliquer aussi au cas où $W_0\Delta_0$ est quelconque ; l'hypothèse essentielle est celle faite sur L_0, M_0, N_0 ; on pourra aussi envisager le cas où $W_0\Delta_0$ est du premier degré par rapport à r_1, r_2, les coefficients de ces derniers étant constants ou plus généralement indépendants respectivement de ρ_2 et de ρ_1.

Dans le cas particulier où, U désignant une fonction de ρ_1, ρ_2 et de x, y, z, $\gamma = \frac{1}{\Delta_0}\frac{\partial(y, z)}{\partial(\rho_1, \rho_2)}$, γ', γ'', on a en outre :

$$X_0 = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y_0 = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z_0 = \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$L_0\frac{\partial x}{\partial \rho_1} + M_0\frac{\partial y}{\partial \rho_1} + N_0\frac{\partial z}{\partial \rho_1} = -\left(\frac{\partial U}{\partial \gamma}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_2}} + \frac{\partial U}{\partial \gamma'}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_2}} + \frac{\partial U}{\partial \gamma''}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_2}}\right),$$

$$L_0\frac{\partial x}{\partial \rho_2} + M_0\frac{\partial y}{\partial \rho_2} + N_0\frac{\partial z}{\partial \rho_2} = \left(\frac{\partial U}{\partial \gamma}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} + \frac{\partial U}{\partial \gamma'}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_1}} + \frac{\partial U}{\partial \gamma''}\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_1}}\right),$$

$$L_0\gamma + M_0\gamma' + N_0\gamma'' = 0,$$

on a alors :

$$\Delta_0\mathscr{Z}_0 = \frac{\partial(U\Delta_0)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \rho_1}\frac{\partial(U\Delta_0)}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}} - \frac{\partial}{\partial \rho_2}\frac{\partial(U\Delta_0)}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_2}},$$

et deux formules analogues, et on obtient les trois équations des extrémales relatives à l'intégrale

$$\iint \Delta_0(W_0 + U)d\rho_1 d\rho_2 ;$$

les formules précédentes reviennent à poser :

$$L_0 = \gamma'\frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma''\frac{\partial U}{\partial \gamma'},$$

$$M_0 = \gamma''\frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial U}{\partial \gamma''},$$

$$N_0 = \gamma\frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma'\frac{\partial U}{\partial \gamma} ;$$

tout ceci résulte de ce que $\gamma, \gamma', \gamma''$ vérifient les systèmes suivants définissant une fonction F de $\frac{\partial x}{\partial \rho_1}, \frac{\partial y}{\partial \rho_1}, \ldots \frac{\partial z}{\partial \rho_2}$:

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_1}}}{\gamma} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_1}}}{\gamma'} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_1}}}{\gamma''}, \qquad \frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial x}{\partial \rho_2}}}{\gamma} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial y}{\partial \rho_2}}}{\gamma'} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial \rho_2}}}{\gamma''}.$$

Un cas particulier intéressant du précédent est celui dans lequel l'expression $\frac{\Delta_0 W_0}{\Delta}$, lorsqu'on prend x et y comme variables, ne dépend, en outre de x, y, que des dérivées de z par rapport à x, y ; il est facile de trouver la forme de W_0.

Observons que les deux expressions

$$dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad -(d\gamma dx + d\gamma' dy + d\gamma'' dz)$$

peuvent s'écrire

$$\mathcal{E}d\rho_1^2 + 2\mathcal{F}d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{G}d\rho_2^2, \qquad \Delta(\mathcal{D}d\rho_1^2 + 2\mathcal{D}'d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{D}''d\rho_2^2),$$

d'où résulte que, en vertu des formules :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial x}{\partial \rho_2} d\rho_2,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial \rho_1} d\rho_1 + \frac{\partial y}{\partial \rho_2} d\rho_2,$$

on a les identités

$$\mathcal{E}d\rho_1^2 + 2\mathcal{F}d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{G}d\rho_2^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy + (1 + q^2)dy^2$$

$$\Delta(\mathcal{D}d\rho_1^2 + 2\mathcal{D}'d\rho_1 d\rho_2 + \mathcal{D}''d\rho_2^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}(rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2).$$

D'après la théorie des invariants des formes quadratiques, on a :

$$\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = (1 + p^2 + q^2)\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho_1, \rho_2)}\right]^2,$$

$$\Delta^2(\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2) = \frac{rt - s^2}{1 + p^2 + q^2}\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho_1, \rho_2)}\right]^2,$$

$$\Delta(\mathcal{G}\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{D}'' - 2\mathcal{F}\mathcal{D}') = \frac{(1 + q^2)r + (1 + p^2)t - 2pqs}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho_1, \rho_2)}\right]^2,$$

et par suite, en passant aux invariants absolus,

$$\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2 = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2},$$

$$\frac{\mathcal{G}\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{D}'' - 2\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta} = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Nous retrouvons les deux expressions bien connues de la courbure totale et de la courbure moyenne. Le cas que nous avions en vue est donc celui dans lequel $\frac{\Delta_0 W_0}{\Delta}$ est une fonction φ de ρ_1, ρ_2 et des deux expressions :

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2} = \mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2, \qquad \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{G}\mathcal{D} + \mathcal{E}\mathcal{D}'' - 2\mathcal{F}\mathcal{D}'}{\Delta},$$

où $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ désignent les rayons de courbure principaux.

La formule, qui résume les équations de la statique de la surface déformable, s'écrit, en prenant x, y comme variables :

$$\delta \iint \varphi \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy + \iint \frac{\Delta_0}{\Delta}(\mathcal{X}_0 \delta x + \mathcal{Y}_0 \delta y + \mathcal{Z}_0 \delta z)\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = 0.$$

La fonction sous le signe $\iint$ dans la seconde intégrale est :

$$\frac{\Delta_0}{\Delta}\left\{\left(\mathcal{X}_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_1} + \mathcal{Y}_0 \frac{\partial y}{\partial \rho_1}\right)\delta\rho_1 + \left(\mathcal{X}_0 \frac{\partial x}{\partial \rho_2} + \mathcal{Y}_0 \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)\delta\rho_2 + \mathcal{Z}_0 \delta z\right\}\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

et par conséquent les équations du problème seront, puisque φ ne renferme pas les dérivées de ρ_1, ρ_2,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})}{\partial r}+\ldots-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})}{\partial q}+\frac{\Delta_0}{\Delta}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathfrak{Z}_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_1}(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})+\left(\mathfrak{X}_0\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\mathfrak{Y}_0\frac{\partial y}{\partial\rho_1}\right)\frac{\Delta_0}{\Delta}\sqrt{1+p^2+q^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2}(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})+\left(\mathfrak{X}_0\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+\mathfrak{Y}_0\frac{\partial y}{\partial\rho_2}\right)\frac{\Delta_0}{\Delta}\sqrt{1+p^2+q^2}=0.$$

Supposons, en particulier, que φ ne dépende pas de ρ_1, ρ_2 et dépende uniquement de $\frac{1}{R_1+R_2}$ et de $\frac{1}{R_1R_2}$: il vient les équations :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})}{\partial r}+\ldots+\frac{\Delta^0}{\Delta}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\mathfrak{Z}_0=0,$$

$$\mathfrak{X}_0=0,\quad \mathfrak{Y}_0=0.$$

On peut écrire :

$$\Delta_0\mathfrak{X}_0=\left\{\frac{\Delta_0}{\Delta}X_0\sqrt{1+p^2+q^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}(L_0+N_0p)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma\frac{\Delta_0}{\Delta}(M_0+N_0q)\right]\right\}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho_1,\rho_2)},$$

$$\Delta_0\mathfrak{Y}_0=\left\{\frac{\Delta_0}{\Delta\gamma''}Y_0-\frac{\partial}{\partial y}\left[\gamma'\frac{\Delta_0}{\Delta}(L_0+N_0p)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma'\frac{\Delta_0}{\Delta}(M_0+N_0q)\right]\right\}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho_1,\rho_2)},$$

$$\Delta_0\mathfrak{Z}_0=\left\{\frac{\Delta_0}{\Delta\gamma''}Z_0-\frac{\partial}{\partial y}\left[\gamma''\frac{\Delta_0}{\Delta}(L_0+N_0p)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma''\frac{\Delta_0}{\Delta}(M_0+N_0q)\right]\right\}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho_1,\rho_2)}.$$

Nous pouvons combiner les deux équations $\mathfrak{X}_0=0$, $\mathfrak{Y}_0=0$, avec celle qui les précèdent ; par exemple, nous pouvons nous arranger de façon à introduire la combinaison $\gamma\mathfrak{X}_0+\gamma'\mathfrak{Y}_0+\gamma''\mathfrak{Z}_0$, en prenant :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial(\varphi\sqrt{1+p^2+q^2})}{\partial r}+\ldots+\frac{\Delta_0}{\Delta}\sqrt{1+p^2+q^2}\,\frac{1}{\gamma''}(\gamma\mathfrak{X}_0+\gamma'\mathfrak{Y}_0+\gamma''\mathfrak{Z}_0)=0.$$

Si les données sont convenables, dans l'équation que nous venons d'écrire ou dans telle autre combinaison, ρ_1, ρ_2 pourront ne plus apparaître, et on aura ainsi, par l'équation précédente, une équation relative à la surface, les équations

$$\mathfrak{X}_0=0,\quad \mathfrak{Y}_0=0$$

servant à définir ρ_1, ρ_2 en fonction de x, y (ou inversement) et pouvant être laissées de côté, si on fait abstraction de l'état naturel.

Considérons le cas particulier, dans lequel la fonction φ est une fonction linéaire à coefficients constants par rapport à $\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2$ et à $\frac{1}{R_1R_2}$, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2+B\frac{1}{R_1R_2}+C,$$

où A, B, C sont des constantes. La constante B disparaît de la question, d'après une remarque faite d'abord par Poisson, dans son mémoire sur les

surfaces élastiques (1), puis reprise et généralisée par Olinde Rodrigues (2), et, dans le cas où toutes les forces extérieures sont nulles, nous résumons l'équation de la question dans

$$\delta \iint \left(\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}\right)^2 \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy + C\delta \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = 0,$$

ce qui est alors la conclusion à laquelle Poisson est arrivé dans ses recherches.

Observons, en terminant, que les développements généraux de ce paragraphe conduisent facilement, par la considération de la déformation infiniment petite, aux théories de Thomson et Tait (3) et de Lord Rayleigh (4); nous laissons au lecteur le soin de faire ce rapprochement et d'étudier en détail le cas (5) où ils se sont placés.

47. Dynamique de la ligne déformable. — La dynamique de la ligne déformable se rattache à l'exposition précédente, où il suffit de regarder l'un des paramètres, ρ_2 par exemple, comme le temps t; on a alors une action simultanée de déformation et de mouvement. Sous l'influence du trièdre, la vitesse d'un point de la ligne déformable entre dans W par les trois arguments ξ_2, η_2, ζ_2, et l'on se trouve en présence de la notion *d'anisotropie cinétique* déjà envisagée par Rankine, et qui s'est introduite depuis dans plusieurs théories de la Physique, dans la théorie de la double réfraction et dans celle de la polarisation rotatoire, par exemple.

Même si W est indépendant des rotations et conduit à des moments extérieurs nuls, l'argument de pure déformation $\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2$ et l'argument $\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2$ sont généralement accompagnés de l'argument $\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2$, un tel genre d'argument n'est pas non plus nouveau dans la Mécanique et apparaît notamment, comme nous le montrerons plus loin, dans la théorie des forces à distance.

Quand W ne contient pas l'argument mixte $\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2$, il faut, en général, considérer l'état de déformation et de mouvement infiniment voisin de l'état naturel, pour se trouver dans le cas de la Mécanique classique, où *l'action de déformation se sépare complètement de l'action cinétique*. On obtient alors le principe de d'Alembert en supposant la force extérieure et le moment extérieur nuls, c'est-à-dire en exprimant que la ligne déformable n'est soumise à

(1) Poisson. — *Mémoire sur les surfaces élastiques*, lu le 1er août 1814 (Mémoires de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, année 1812, seconde Partie, p. 167-225); un extrait de ce mémoire a d'abord paru dans le Bulletin de la Société Philomatique, puis dans la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, T. III, p. 154-159, 1815.

(2) Rodrigues. — *Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie*. Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, T. III, p. 162-182, 1815; voir en particulier p. 173 et suiv..

(3) Thomson et Tait. — *Treatise*, Part. II, n° 644.

(4) Lord Rayleigh. — *Theory of Sound*, vol. I, 2e édit., 1894, p. 352.

(5) Il s'agit de la déformation *infiniment petite* d'une surface primitivement *plane*.

aucune action du monde extérieur, et en introduisant, par suite, la notion fondamentale de *système isolé*, dont nous avons parlé au début de cette note.

La dynamique de la surface déformable pourra s'établir de la même manière, au moyen de la théorie du milieu déformable à trois dimensions, que nous allons maintenant exposer.

IV. — STATIQUE ET DYNAMIQUE DU MILIEU DÉFORMABLE.

48. Milieu déformable. Etat naturel et état déformé. — Les théories de la ligne déformable et de la surface déformable que nous venons de faire connaître conduisent d'une manière très naturelle à envisager un milieu déformable plus général que celui considéré habituellement dans la théorie de l'élasticité, qui nous paraît atteindre le but qu'ont poursuivi Lord Kelvin et Helmholtz dans les théories de la lumière et du magnétisme.

Considérons un espace (M_0) décrit par un point M_0, dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 par rapport à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz ; nous pourrions regarder ces coordonnées comme des fonctions de trois paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3 choisis d'une manière quelconque ; mais, pour simplifier, nous supposerons que ces coordonnées sont prises pour variables indépendantes. Adjoignons à chaque point M_0 de l'espace (M_0) un trièdre trirectangle dont les axes M_0x_0', M_0y_0', M_0z_0'ont, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz des cosinus directeurs qui sont respectivement α_0, α_0', α_0'' ; β_0, β_0', β_0'' ; γ_0, γ_0', γ_0'', et qui sont des fonctions des variables indépendantes x_0, y_0, z_0.

L'ensemble continu à trois dimensions de tels trièdres $M_0x_0'y_0'z_0'$ sera ce que nous appellerons un *milieu déformable*.

Donnons au point M_0 un déplacement M_0M ; soient x, y, z les coordonnées du point M par rapport au trièdre fixe $Oxyz$. Imprimons en outre au trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ une rotation, qui amènera finalement ses axes à être ceux d'un trièdre $Mx'y'z'$ que nous adjoindrons au point M ; nous définirons cette rotation en nous donnant, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, les cosinus directeurs α, α', α'' ; β, β', β'' ; γ, γ', γ'' des axes Mx', My', Mz'.

L'ensemble continu à trois dimensions des trièdres $Mx'y'z'$ sera ce que nous appellerons l'*état déformé* du milieu déformable considéré qui, dans son état primitif, sera dit à l'*état naturel*.

49. Eléments cinématiques relatifs aux états du milieu déformable. — Pour la commodité de l'écriture et des notations, nous introduirons parfois dans ce qui va suivre, au lieu de x_0, y_0, z_0, les lettres ρ_1, ρ_2, ρ_3, ce qui ne constituera qu'un changement commode de notations, exprimé par les formules

$$x_0 = \rho_1, \qquad y_0 = \rho_2, \qquad z_0 = \rho_3,$$

qu'il suffira d'avoir présentes à l'esprit.

Désignons par $\xi_i^{(0)}$, $\eta_i^{(0)}$, $\zeta_i^{(0)}$ les composantes de la vitesse de l'origine M_0 des axes M_0x_0', M_0y_0', M_0z_0' suivant ces axes, quand ρ_i varie seul et joue le rôle du temps ; soient également $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$ les projections sur ces mêmes

axes de la rotation instantanée du trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ relative au paramètre ρ_i. Nous désignerons par ξ_i, η_i, ζ_i et par p_i, q_i, r_i les quantités analogues pour le trièdre $Mx'y'z'$, lorsqu'on le rapporte, comme le trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ au trièdre fixe $Oxyz$.

Les éléments que nous venons d'introduire se calculent à la façon habituelle ; en particulier, on a :

$$(43)\quad \begin{cases} \xi_i = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \alpha' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \alpha'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \\ \eta_i = \beta \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \beta' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \beta'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \\ \zeta_i = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \gamma' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \gamma'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \end{cases} \qquad (44)\quad \begin{cases} p_i = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i}, \\ q_i = \sum \alpha \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} = -\sum \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i}, \\ r_i = \sum \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} = -\sum \alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i}. \end{cases}$$

L'élément linéaire du milieu déformé (M), rapporté aux variables indépendantes x_0, y_0, z_0 est défini par la formule :

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & (1 + 2\varepsilon_1)dx_0^2 + (1 + 2\varepsilon_2)dy_0^2 + (1 + 2\varepsilon_3)dz_0^2 \\ & + 2\gamma_1 dy_0 dz_0 + 2\gamma_2 dz_0 dx_0 + 2\gamma_3 dx_0 dy_0, \end{aligned}$$

où ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 se calculeront par les doubles formules suivantes :

$$(45)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2 - 1\right] = \dfrac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - 1), \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y_0}\right)^2 - 1\right] = \dfrac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 1), \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial z_0}\right)^2 - 1\right] = \dfrac{1}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 - 1), \\ \gamma_1 = \dfrac{\partial x}{\partial y_0}\dfrac{\partial x}{\partial z_0} + \dfrac{\partial y}{\partial y_0}\dfrac{\partial y}{\partial z_0} + \dfrac{\partial z}{\partial y_0}\dfrac{\partial z}{\partial z_0} = \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3, \\ \gamma_2 = \dfrac{\partial x}{\partial z_0}\dfrac{\partial x}{\partial x_0} + \dfrac{\partial y}{\partial z_0}\dfrac{\partial y}{\partial x_0} + \dfrac{\partial z}{\partial z_0}\dfrac{\partial z}{\partial x_0} = \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1, \\ \gamma_3 = \dfrac{\partial x}{\partial x_0}\dfrac{\partial x}{\partial y_0} + \dfrac{\partial y}{\partial x_0}\dfrac{\partial y}{\partial y_0} + \dfrac{\partial z}{\partial x_0}\dfrac{\partial z}{\partial y_0} = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2. \end{cases}$$

Désignons par x', y', z' les projections du segment OM sur les axes Mx', My', Mz', en sorte que les coordonnées, par rapport à ces axes, du *point fixe* O seront $-x'$, $-y'$, $-z'$. Nous aurons les formules connues :

$$(46)\quad \xi_i - \frac{\partial x'}{\partial \rho_i} - qz' + ry' = 0, \quad \eta_i - \frac{\partial y'}{\partial \rho_i} - rx' + pz' = 0, \quad \zeta_i - \frac{\partial z'}{\partial \rho_i} - py' + qx' = 0,$$

qui donnent de nouvelles expressions de ξ_i, η_i, ζ_i.

50. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé. — Supposons qu'on imprime à chacun des trièdres de l'état déformé un déplacement infiniment petit pou-

vant varier d'une façon continue avec ces trièdres. Désignons par δx, δy, δz ; $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ..., $\delta\gamma''$ les variations respectives de x, y, z ; x', y', z' ; $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$. Les variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ..., $\delta\gamma''$ s'expriment par des formules telles que la suivante :

$$\delta\alpha = \beta\delta\kappa' - \gamma\delta\jmath', \tag{47}$$

au moyen des trois auxiliaires $\delta\imath'$, $\delta\jmath'$, $\delta\kappa'$, qui sont les composantes suivant Mx', My', Mz' de la rotation instantanée bien connue attachée au déplacement infiniment petit considéré. Les variations δx, δy, δz sont les projections sur Ox, Oy, Oz du déplacement infiniment petit éprouvé par le point M ; les projections $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ de ce déplacement sur Mx', My', Mz' s'en déduisent immédiatement et ont pour valeurs :

$$\delta' x = \delta x' + z'\delta\jmath' - y'\delta\kappa', \quad \delta' y = \delta y' + x'\delta\kappa' - z'\delta\imath', \quad \delta' z = \delta z' + y'\delta\imath' - x'\delta\jmath'. \tag{48}$$

Proposons-nous de déterminer les variations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, δp_i, δq_i, δr_i éprouvées respectivement par ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i. D'après les formules (44), nous avons :

$$\delta p_i = \sum\left(\frac{\partial\beta}{\partial\rho_i}\delta\gamma + \gamma\frac{\partial\delta\beta}{\partial\rho_i}\right),$$
$$\delta q_i = \sum\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\rho_i}\delta\alpha + \alpha\frac{\partial\delta\gamma}{\partial\rho_i}\right),$$
$$\delta r_i = \sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial\rho_i}\delta\beta + \beta\frac{\partial\delta\alpha}{\partial\rho_i}\right),$$

Remplaçons $\delta\alpha$ par sa valeur $\beta\delta\kappa' - \gamma\delta\jmath'$, et $\delta\alpha'$, ..., $\delta\gamma''$ par leurs valeurs analogues ; il vient ;

$$\delta p_i = \frac{\partial\delta\imath'}{\partial\rho_i} + q_i\delta\kappa' - r_i\delta\jmath', \quad \delta q_i = \frac{\partial\delta\jmath'}{\partial\rho_i} + r_i\delta\imath' - p_i\delta\kappa', \quad \delta r_i = \frac{\partial\delta\kappa'}{\partial\rho_i} + p_i\delta\jmath' - q_i\delta\imath'. \tag{49}$$

Les formules (46) nous donnent de même trois formules dont la première est :

$$\delta\xi_i = \frac{\partial\delta x'}{\partial\rho_i} + q_i\delta z' - r_i\delta y' + z'\delta q_i - y'\delta r_i ;$$

remplaçons δp_i, δq_i, δr_i par leurs valeurs données par les formules (49) ; il vient :

$$\left\{\begin{aligned}
\delta\xi_i &= \eta_i\delta\kappa' - \zeta_i\delta\jmath' + \frac{\partial\delta' x}{\partial\rho_i} + q_i\delta' x - r_i\delta' y,\\
\delta\eta_i &= \zeta_i\delta\imath' - \xi_i\delta\kappa' + \frac{\partial\delta' y}{\partial\rho_i} + r_i\delta' y - p_i\delta' z,\\
\delta\zeta_i &= \xi_i\delta\jmath' - \eta_i\delta\imath' + \frac{\partial\delta' z}{\partial\rho_i} + p_i\delta' z - q_i\delta' x,
\end{aligned}\right. \tag{50}$$

en introduisant, pour abréger l'écriture, les trois symboles $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$ définis par les formules (48).

51. Action euclidiennne de déformation sur un milieu déformable. — Conservons les notations du § **49**, et introduisons la quantité connue Δ définie par la formule :

$$\Delta = \frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

et dont le carré, formé par la règle de multiplication des déterminants, s'exprime, en fonction de ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, par la formule :

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Considérons une fonction W de *deux positions infiniment voisines* du trièdre $Mx'y'z'$, c'est-à-dire une fonction de x_0, y_0, z_0, de x, y, z, α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' et de leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0. Proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour que l'intégrale

$$\iiint W dx_0 dy_0 dz_0,$$

étendue à une portion quelconque de l'espace (M_0) ait une variation nulle, quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres du milieu déformable, pris dans son état déformé, *à une même transformation infinitésimale quelconque du groupe des déplacements euclidiens.*

Il s'agit en définitive, de déterminer W de façon que l'on ait :

$$\delta W = 0,$$

lorsque, d'une part, l'origine M du trièdre $Mx'y'z'$ subit un déplacement infiniment petit, dont les projections δx, δy, δz sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$(51) \qquad \begin{cases} \delta x = (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\delta t, \\ \delta y = (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\delta t, \\ \delta z = (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\delta t, \end{cases}$$

où a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 sont six constantes arbitraires et δt une quantité infiniment petite, indépendante de x_0, y_0, z_0, et lorsque, d'autre part, ce trièdre $Mx'y'z'$ subit une rotation infiniment petite, dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\omega_1 \delta t, \qquad \omega_2 \delta t, \qquad \omega_3 \delta t.$$

Observons que, dans le cas présent, les variations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$; δp_i, δq_i, δr_i des dix-huit expressions ξ_i, η_i, ζ_i ; p_i, q_i, r_i sont nulles, comme cela résulte de la théorie bien connue du trièdre mobile, et comme nous pouvons d'ailleurs

le vérifier immédiatement au moyen des formules (49) et (50), en y remplaçant $\delta' x$, $\delta' y$, $\delta' z$; δ_1', δ_3', δ_K' par leurs valeurs actuelles. Il en résulte que nous obtenons une solution de la question, en prenant pour W une fonction arbitraire de x_0, y_0, z_0 et des dix-huit expressions ξ_i, η_i, ζ_i ; p_i, q_i, r_i ; nous allons maintenant montrer que nous obtenons ainsi la solution générale (1) du problème que nous nous sommes posé.

Remarquons à cet effet que les relations (44) permettent, au moyen de formules bien connues, d'exprimer les dérivées premières des neuf cosinus α, α', ..., γ'' par rapport à x_0, y_0, z_0, au moyen de ces cosinus et de p_i, q_i, r_i. D'autre part, les formules (43) permettent de concevoir qu'on exprime les neuf cosinus α, α', ..., γ'' au moyen de ξ_1, η_1, ζ_1 et des dérivées premières de x, y, z par rapport à x_0, ou au moyen de ξ_2, η_2, ζ_2 et des dérivées premières de x, y, z par rapport à y_0, ou enfin au moyen de ξ_3, η_3, ζ_3 et des dérivées premières de x, y, z par rapport à z_0. Il est d'ailleurs inutile, dans ce dernier cas, que nous fassions une hypothèse sur le mode de résolution ; car il est clair que nous n'obtenons pas une forme plus générale que celle dont nous sommes partis, en supposant finalement la fonction W que nous cherchons, une fonction quelconque de x_0, y_0, z_0, de x, y, z et de leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0, et enfin de ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, ce que nous indiquerons, au moyen des notations $\rho_1 = x_0$, $\rho_2 = y_0$, $\rho_3 = z_0$, en écrivant :

$$W = W\left(\rho_i, x, y, z, \frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \frac{\partial z}{\partial \rho_i}, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i\right).$$

Les variations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, δp_i, δq_i, δr_i étant nulles, dans le cas actuel, ainsi qu'on l'a remarqué il y a un instant, nous avons finalement à écrire, pour la nouvelle forme de W, que l'on a, en vertu des formules (51), et quels que soient a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3,

$$\frac{\partial W}{\partial x}\delta x + \frac{\partial W}{\partial y}\delta y + \frac{\partial W}{\partial z}\delta z + \sum\left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i}}\delta\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}}\delta\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}}\delta\frac{\partial z}{\partial \rho_i}\right) = 0.$$

Remplaçons δx, δy, δz par leurs valeurs (51) et $\delta\dfrac{\partial x}{\partial \rho_i}$, $\delta\dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}$, $\delta\dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}$ par les valeurs qu'on en déduit en différentiant ; égalons à zéro les coefficients de a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 ; il nous vient les six conditions suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y}{\partial \rho_i}\right) = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i}}\frac{\partial z}{\partial \rho_i}\right) = 0.$$

$$\sum\left(\frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i}}\frac{\partial y}{\partial \rho_i} - \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i}}\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\right) = 0,$$

(1) Nous supposons, dans ce qui va suivre, que *le milieu est susceptible de toutes les déformations possibles*, que, par suite, *l'état déformé peut être pris absolument arbitraire.*

qui sont des identités, si nous admettons que les expressions qui figurent dans W ont été réduites au nombre moindre.

Les trois premières nous montrent, ce que l'on pouvait prévoir facilement, que W est indépendant de x, y, z ; les trois dernières expriment que W ne dépend des dérivées premières de x, y, z, par rapport à x_0, y_0, z_0, que par l'intermédiaire des quantités ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 définies par les formules (45) ; nous voyons donc finalement que *la fonction* W *cherchée a la forme remarquable* :

$$W(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i),$$

analogue à celle rencontrée déjà pour la ligne déformable et pour la surface déformable.

Si nous multiplions W par l'élément de volume $dx_0dy_0dz_0$ de l'espace (M_0), le produit $Wdx_0dy_0dz_0$ obtenu est, dans le groupe des déplacements euclidiens, un invariant analogue à l'élément de volume du milieu (M).

De même que la valeur commune des intégrales :

$$\iiint_{S_0} |\Delta| \, dx_0dy_0dz_0, \qquad \iiint_S dxdydz,$$

prises respectivement à l'intérieur d'une surface S_0 du milieu (M_0) et à l'intérieur de la surface correspondante S du milieu (M), détermine le *volume* du domaine limité par la surface S, de même, en associant dans l'esprit la notion d'action au passage de l'état naturel (M_0) à l'état déformé (M), nous adjoindrons la fonction W aux éléments de définition du milieu déformable, et nous dirons que l'intégrale

$$\iiint_{S_0} W dx_0dy_0dz_0$$

est l'*action de déformation*, à l'intérieur de la surface S, sur le milieu déformé.

Nous dirons d'autre part que W est la *densité* de l'action de déformation *en un point* du milieu déformé, rapportée à l'unité de volume du milieu non déformé, et que $\dfrac{W}{|\Delta|}$ est la densité de cette action en un point, rapportée à l'unité de volume du milieu déformé.

52. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort et le moment de déformation en un point du milieu déformé. — Considérons une variation *quelconque* de l'action de déformation à l'intérieur d'une surface S du milieu (M), savoir :

$$\delta \iiint_{S_0} W dx_0dy_0dz_0$$

$$= \iiint_{S_0} \sum \left(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \delta \xi_1 + \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \delta \zeta_i + \frac{\partial W}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W}{\partial r_i} \delta r_i \right) dx_0dy_0dz_0.$$

Nous pouvons l'écrire, en vertu des formules (49) et (50) du § 50 :

$$\begin{aligned}\delta\iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0 = \iiint_{S_0} \sum \Big\{ &\frac{\partial W}{\partial \xi_i}(\eta_i \delta\kappa' - \zeta_i \delta\iota' + \frac{\partial \delta' x}{\partial \rho_i} + q_i \delta' z - r_i \delta' y)\\ &+ \frac{\partial W}{\partial \eta_i}(\zeta_i \delta\iota' - \xi_i \delta\kappa' + \frac{\partial \delta' y}{\partial \rho_i} + r_i \delta' x - p_i \delta' z)\\ &+ \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}(\xi_i \delta\iota' - \eta_i \delta\iota' + \frac{\partial \delta' z}{\partial \rho_i} + p_i \delta' y - q_i \delta' x)\\ &+ \frac{\partial W}{\partial p_i}\left(\frac{\partial \delta\iota'}{\partial \rho_i} + q_i \delta\kappa' - r_i \delta\iota'\right) + \frac{\partial W}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \delta\iota'}{\partial \rho_i} + r_i \delta\iota' - p_i \delta\kappa'\right)\\ &+ \frac{\partial W}{\partial r_i}\left(\frac{\partial \delta\kappa'}{\partial \rho_i} + p_i \delta\iota' - q_i \delta\iota'\right)\Big\} dx_0 dy_0 dz_0.\end{aligned}$$

Appliquons la formule de GREEN aux termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport à une des variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 ; il vient, en désignant par l_0, m_0, n_0 les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, de la normale extérieure à la surface S_0, qui limite le milieu avant déformation, et par $d\sigma_0$ l'élément d'aire de cette surface :

$$\begin{aligned}\delta\iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0 = \iint_{S_0} \Big\{ &\left(l_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_3}\right)\delta' x\\ &+ \left(l_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_3}\right)\delta' y + \left(l_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_3}\right)\delta' z\\ &+ \left(l_0 \frac{\partial W}{\partial p_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial p_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial p_3}\right)\delta\iota' + \left(l_0 \frac{\partial W}{\partial q_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial q_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial q_3}\right)\delta\iota'\\ &+ \left(l_0 \frac{\partial W}{\partial r_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial r_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial r_3}\right)\delta\kappa' \Big\} d\sigma_0\\ - \iiint_{S_0} \Big\{ &\left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \xi_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)\right]\delta' x\\ &+ \left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \eta_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right)\right]\delta' y\\ &+ \left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)\right]\delta' z\\ &+ \left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial r_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)\right]\delta\iota'\\ &+ \left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial r_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \cdots \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right)\right]\delta\iota'\\ &+ \left[\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial r_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \xi_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)\right]\kappa' \Big\} dx_0 dy_0 dz_0.\end{aligned}$$

Posons :

$$F_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \xi_3}, \qquad I_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial p_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial p_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial p_3},$$

$$G_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \eta_3}, \qquad J_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial q_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial q_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial q_3},$$

$$H_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial \zeta_3}, \qquad K_0' = l_0 \frac{\partial W}{\partial r_1} + m_0 \frac{\partial W}{\partial r_2} + n_0 \frac{\partial W}{\partial r_3},$$

$$X_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \right],$$

$$Y_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \right],$$

$$Z_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right],$$

$$L_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial r_i} - r_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \right],$$

$$M_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial p_i} - p_i \frac{\partial W}{\partial r_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \right],$$

$$N_0' = \sum \left[\frac{\partial}{\partial \rho_i} \frac{\partial W}{\partial r_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \xi_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} \right],$$

nous aurons :

$$\delta \iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0 = \iint_{S_0} (F_0' \delta' x + G_0' \delta' y + H_0' \delta' z + I_0' \delta \imath' + J_0' \delta \jmath' + K_0' \delta \kappa') d\sigma_0$$

$$- \iiint_{S^0} (X_0' \delta' x + Y_0' \delta' y + Z_0' \delta' z + L_0' \delta \imath' + M_0' \delta \jmath' + N_0' \delta \kappa')\, dx_0 dy_0 dz_0.$$

En ayant d'abord égard à l'intégrale triple, qui figure dans l'expression de $\delta \iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0$, nous appellerons *force extérieure et moment extérieur au point M, rapportés à l'unité de volume du milieu non déformé*, les segments ayant leur origine en M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement X_0', Y_0', Z_0', et L_0', M_0', N_0'.

En ayant ensuite égard à l'intégrale de surface qui figure dans

$$\delta \iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0,$$

nous appellerons *effort extérieur et moment de déformation extérieur au point* M *de la surface* S, qui limite le milieu déformé, *rapportés à l'unité d'aire de la surface* S_0, les segments issus de ce point M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$ et $-I_0'$,

$-J_0'$, $-K_0'$. Ces six dernières quantités, en un point déterminé M de (S), ne dépendent que de la direction de la normale extérieure à la surface (S) ; elles restent invariables, si la région considérée de (M_0) variant, cette direction de la normale extérieure ne change pas, et elles changent de signe si cette direction est remplacée par la direction opposée. Supposons qu'à l'intérieur du milieu déformé limité par la surface (S), on trace une surface (Σ), circonscrivant, soit seule, soit avec une portion de la surface (S), une partie (A) du milieu et désignons par (B) ce qui reste du milieu en dehors de la partie (A). Soit (Σ_0) la surface de (M_0) qui correspond à la surface (Σ) de (M) et soient (A_0) et (B_0) les régions de (M_0) qui correspondent aux régions (A) et (B) de (M). Séparons par la pensée les deux parties (A) et (B) ; on pourra regarder les deux segments $(-F_0', -G_0', -H_0')$ et $(-I_0', -J_0', -K_0')$ déterminés pour le point M et pour la direction de la normale menée à (Σ_0) vers l'extérieur de (A_0) comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M de la frontière (Σ) de la région (A) ; on pourra regarder de même les deux segments (F_0', G_0', H_0') et (I_0', J_0', K_0') comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M de la frontière (Σ) de la région (B). En raison de cette remarque, nous dirons que $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$ et $-I_0'$ $-J_0'$, $-K_0'$ sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz', *de l'effort et du moment de déformation exercés en* M *sur la portion* (A) *du milieu* (M), et que F_0', G_0', H_0', et I_0', J_0', K_0' sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation exercés en* M *sur la portion* (B) *du milieu* (M).

L'observation faite à la fin des §§ **9** et **34** au sujet du remplacement du trièdre $Mx'y'z'$ par un trièdre qui lui est invariablement lié se répète ici sans modification.

53. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation. — Posons :

$$A_i' = \frac{\partial W}{\partial \xi_i}, \quad B_i' = \frac{\partial W}{\partial \eta_i}, \quad C_i' = \frac{\partial W}{\partial \zeta_i},$$

$$P_i' = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad Q_i' = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad R_i' = \frac{\partial W}{\partial r_i};$$

A_i', B_i', C_i' et P_i', Q_i', R_i' représentent respectivement les projections sur Mx', My', Mz' de l'effort et du moment de déformation qui s'exercent au point M sur une surface qui, avant déformation, avait pour normale intérieure au point M_0 la parallèle à celui des axes coordonnés Ox, Oy, Oz qui correspond à l'indice i ; il suffit, en effet, de se rappeler qu'on a déjà convenu de remplacer par ρ_1, ρ_2, ρ_3 les lettres x_0, y_0, z_0 qui correspondent respectivement, d'après cette convention, aux indices 1, 2, 3. Cet effort et ce moment de déformation sont, rappelons-le, rapportés à l'unité d'aire de la surface non déformée.

Les nouveaux efforts et les nouveaux moments de déformation que nous

venons de définir sont liés aux éléments introduits dans le § précédent par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_0' &= l_0A_1' + m_0A_2' + n_0A_3', & I_0' &= l_0P_1' + m_0P_2' + n_0P_3', \\ G_0' &= l_0B_1' + m_0B_2' + n_0B_3', & J_0' &= l_0Q_1' + m_0Q_1' + n_0Q_3', \\ H_0' &= l_0C_1' + m_0C_2' + n_0C_3', & K_0' &= l_0R_1' + m_0R_2' + n_0R_3'. \end{aligned}$$

$$\sum\left(\frac{\partial A_i'}{\partial p_i} + q_iC_i' - r_iB_i'\right) - X_0' = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial B_i'}{\partial p_i} + r_iA_i' - p_iC_i'\right) - Y_0' = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial C_i'}{\partial p_i} + p_iB_i' - q_iA_i'\right) - Z_0' = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial P_i'}{\partial p_i} + q_iR_i' - r_iQ_i' + \eta_iC_i' - \xi_iB_i'\right) - L_0' = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial Q_i'}{\partial p_i} + r_iP_i' - p_iR_i' + \zeta_iA_i' - \xi_iC_i'\right) - M_0' = 0,$$

$$\sum\left(\frac{\partial R_i'}{\partial p_i} + p_iQ_i' - q_iP_i' + \xi_iB_i' - \eta_iA_i'\right) - N_0' = 0,$$

On peut se proposer de transformer les relations que nous venons d'écrire, indépendamment des valeurs, calculées au moyen de W, des quantités qui y figurent. Ces relations ont lieu, en effet, entre des segments attachés au point M et auxquels nous avons attribué des noms; au lieu de définir ces segments par leurs projections sur Mx', My', Mz', nous pouvons tout aussi bien les définir par leurs projections sur d'autres axes ; ces dernières projections seront liées par des relations, transformées des précédentes.

Les relations transformées s'obtiendront d'ailleurs immédiatement si l'on remarque que les formules primitives ont des interprétations simples et immédiates (1) par l'adjonction aux axes mobiles des axes qui leur sont menés parrallèlement par le point O.

1. Bornons-nous à la considération des axes fixes Ox, Oy, Oz ; désignons respectivement par X_0, Y_0, Z_0 et par L_0, M_0, N_0 les projections sur ces axes de la force extérieure et du moment extérieur en un point quelconque M du milieu déformé, par F_0, G_0, H_0 et par I_0, J_0, K_0 les projections de l'effort et du moment de déformation sur une surface dont, avant déformation, la normale intérieure a des cosinus directeurs l_0, m_0, n_0 ; par A_i, B_i, C_i et par P_i, Q_i, R_i les projections de l'effort (A_i', B_i', C_i') et du moment de déforma-

(1) Une interprétation intéressante à noter est l'analogue de celle donnée par P. Saint-Guilhem à propos de la dynamique du trièdre.

tion (P_i', Q_i', R_i'). Les transformées des relations précédentes sont évidemment :

$$\begin{aligned} F_0 &= l_0A_1 + m_0A_2 + n_0A_3, & I_0 &= l_0P_1 + m_0P_2 + n_0P_3, \\ G_0 &= l_0B_1 + m_0B_2 + n_0B_3, & J_0 &= l_0Q_1 + m_0Q_2 + n_0Q_3, \\ H_0 &= l_0C_1 + m_0C_2 + n_0C_3, & K_0 &= l_0R_1 + m_0R_2 + n_0R_3, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_0} + \frac{\partial A_2}{\partial y_0} + \frac{\partial A_3}{\partial z_0} - X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_0} + \frac{\partial B_2}{\partial y_0} + \frac{\partial B_3}{\partial z_0} - Y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_0} + \frac{\partial C_2}{\partial y_0} + \frac{\partial C_3}{\partial z_0} - Z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_0} + \frac{\partial P_2}{\partial y_0} + \frac{\partial P}{\partial z_0} + C_1\frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial y}{\partial z_0} - B_1\frac{\partial z}{\partial x_0} - B_2\frac{\partial z}{\partial y_0} - B_3\frac{\partial z}{\partial z_0} - L_0 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_0} + \frac{\partial Q_2}{\partial y_0} + \frac{\partial Q_3}{\partial z_0} + A_1\frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial z}{\partial z_0} - C_1\frac{\partial x}{\partial x_0} - C_2\frac{\partial x}{\partial y_0} - C_3\frac{\partial x}{\partial z_0} - M_0 = 0,$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_0} + \frac{\partial R_2}{\partial y_0} + \frac{\partial R_3}{\partial z_0} + B_1\frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial x}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial x}{\partial z_0} - A_1\frac{\partial y}{\partial x_0} - A_2\frac{\partial y}{\partial y_0} - A_3\frac{\partial y}{\partial z_0} - N_0 = 0,$$

relations qui sont des généralisations pour trois dimensions, des équations de Lord Kelvin et Tait pour une et deux dimensions.

2. Observons maintenant que nous pouvons exprimer les neuf cosinus α, α', ... γ'' au moyen de trois auxiliaires ; soient λ_1, λ_2, λ_3 trois telles auxiliaires. Posons :

$$\sum \gamma d\beta = -\sum \beta d\gamma = \varpi_1' d\lambda_1 + \varpi_2' d\lambda_2 + \varpi_3' d\lambda_3,$$

$$\sum \alpha d\gamma = -\sum \gamma d\alpha = \chi_1' d\lambda_1 + \chi_2' d\lambda_2 + \chi_3' d\lambda_3,$$

$$\sum \beta d\alpha = -\sum \alpha d\beta = \sigma_1' d\lambda_1 + \sigma_2' d\lambda_2 + \sigma_3' d\lambda_3.$$

Les fonctions ϖ_i', χ_i', σ_i' de λ_1, λ_2, λ_3 ainsi définies satisfont aux relations :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varpi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i'}{\partial \lambda_j} + \chi_i'\sigma_j' - \chi_j'\sigma_i' = 0, \\ &\frac{\partial \chi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i'}{\partial \lambda_j} + \sigma_i'\varpi_j' - \sigma_j'\varpi_i' = 0, \qquad (i, j) = 1, 2, 3. \\ &\frac{\partial \sigma_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i'}{\partial \lambda_j} + \varpi_i'\chi_j' - \varpi_j'\chi_i' = 0, \end{aligned}$$

et l'on a :

$$\begin{aligned} p_i &= \varpi_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \varpi_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \varpi_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}, \\ q_i &= \chi_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \chi_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \chi_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}, \qquad (\text{où } x_0 = \rho_1, \quad y_0 = \rho_2, \quad z_0 = \rho_3) \\ r_i &= \sigma_1' \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \sigma_2' \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \sigma_3' \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}. \end{aligned}$$

Désignons ϖ_i, χ_i, σ_i les projections, sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, du

segment dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont ϖ_i', χ_i', σ_i' ; nous aurons :

$$\sum \alpha' d\alpha'' = -\sum \alpha'' d\alpha' = \varpi_1 d\lambda_1 + \varpi_2 d\lambda_2 + \varpi_3 d\lambda_3,$$
$$\sum \alpha'' d\alpha = -\sum \alpha d\alpha'' = \chi_1 d\lambda_1 + \chi_2 d\lambda_2 + \chi_3 d\lambda_3,$$
$$\sum \alpha d\alpha' = -\sum \alpha' d\alpha = \sigma_1 d\lambda_1 + \sigma_2 d\lambda_2 + \sigma_3 d\lambda_3,$$

en vertu desquelles (1), les nouvelles fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i de λ_1, λ_2, λ_3 satisfont aux relations :

$$\frac{\partial \varpi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i}{\partial \lambda_j} = \chi_i \sigma_j - \chi_j \sigma_i,$$
$$\frac{\partial \chi_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i}{\partial \lambda_j} = \sigma_i \varpi_j - \sigma_j \varpi_i, \qquad (i, j) = 1, 2, 3.$$
$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i}{\partial \lambda_j} = \varpi_i \chi_j - \varpi_j \chi_i.$$

Nous ferons encore la remarque, qui nous servira plus loin, que si l'on désigne par $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ les variations de λ_1, λ_2, λ_3 qui correspondent aux variations δx, $\delta x'$, ... $\delta\gamma''$ de x, x', ... γ'', on aura :

$$\delta \mathrm{I}' = \varpi_1' \delta\lambda_1 + \varpi_2' \delta\lambda_2 + \varpi_3' \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{J}' = \chi_1' \delta\lambda_1 + \chi_2' \delta\lambda_2 + \chi_3' \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{K}' = \sigma_1' \delta\lambda_1 + \sigma_2' \delta\lambda_2 + \sigma_3' \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{I} = \alpha \delta \mathrm{I}' + \beta \delta \mathrm{J}' + \gamma \delta \mathrm{K}' = \varpi_1 \delta\lambda_1 + \varpi_2 \delta\lambda_2 + \varpi_3 \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{J} = \alpha' \delta \mathrm{I}' + \beta' \delta \mathrm{J}' + \gamma' \delta \mathrm{K}' = \chi_1 \delta\lambda_1 + \chi_2 \delta\lambda_2 + \chi_3 \delta\lambda_3,$$
$$\delta \mathrm{K} = \alpha'' \delta \mathrm{I}' + \beta'' \delta \mathrm{J}' + \gamma'' \delta \mathrm{K}' = \sigma_1 \delta\lambda_1 + \sigma_2 \delta\lambda_2 + \sigma_3 \delta\lambda_3,$$

où $\delta \mathrm{I}$, $\delta \mathrm{J}$, $\delta \mathrm{K}$ sont les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz' sont $\delta \mathrm{I}'$, $\delta \mathrm{J}'$, $\delta \mathrm{K}'$.

Posons maintenant

$$\mathcal{J}_0 = \varpi_1' \mathrm{I}_0' + \chi_1' \mathrm{J}_0' + \sigma_1' \mathrm{K}_0' = \varpi_1 \mathrm{I}_0 + \chi_1 \mathrm{J}_0 + \sigma_1 \mathrm{K}_0,$$
$$\mathcal{J}_0 = \varpi_2' \mathrm{I}_0' + \chi_2' \mathrm{J}_0' + \sigma_2' \mathrm{K}_0' = \varpi_2 \mathrm{I}_0 + \chi_2 \mathrm{J}_0 + \sigma_2 \mathrm{K}_0,$$
$$\mathcal{K}_0 = \varpi_3' \mathrm{I}_0' + \chi_3' \mathrm{J}_0' + \sigma_3' \mathrm{K}_0' = \varpi_3 \mathrm{I}_0 + \chi_3 \mathrm{J}_0 + \sigma_3 \mathrm{K}_0,$$
$$\mathcal{L}_0 = \varpi_1' \mathrm{L}_0' + \chi_1' \mathrm{M}_0' + \sigma_1' \mathrm{N}_0' = \varpi_1 \mathrm{L}_0 + \chi_1 \mathrm{M}_0 + \sigma_1 \mathrm{N}_0,$$
$$\mathcal{M}_0 = \varpi_2' \mathrm{L}_0' + \chi_2' \mathrm{M}_0' + \sigma_2' \mathrm{N}_0' = \varpi_2 \mathrm{L}_0 + \chi_2 \mathrm{M}_0 + \sigma_2 \mathrm{N}_0,$$
$$\mathcal{N}_0 = \varpi_3' \mathrm{L}_0' + \chi_3' \mathrm{M}_0' + \sigma_3' \mathrm{N}_0' = \varpi_3 \mathrm{L}_0 + \chi_3 \mathrm{M}_0 + \sigma_3 \mathrm{N}_0.$$

Introduisons en outre les notations suivantes :

$$\Pi_i = \varpi_1' \mathrm{P}_i' + \chi_1' \mathrm{Q}_i' + \sigma_1' \mathrm{R}_i' = \varpi_1 \mathrm{P}_i + \chi_1 \mathrm{Q}_i + \sigma_1 \mathrm{R}_i,$$
$$\mathrm{X}_i = \varpi_2' \mathrm{P}_i' + \chi_2' \mathrm{Q}_i' + \sigma_2' \mathrm{R}_i' = \varpi_2 \mathrm{P}_i + \chi_2 \mathrm{Q}_i + \sigma_2 \mathrm{R}_i,$$
$$\Sigma_i = \varpi_3' \mathrm{P}_i' + \chi_3' \mathrm{Q}_i' + \sigma_3' \mathrm{R}_i' = \varpi_3 \mathrm{P}_i + \chi_3 \mathrm{Q}_i + \sigma_3 \mathrm{R}_i,$$

(1) Ces formules peuvent servir de définition directe aux fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i et être substituées à

$$\varpi_i = \alpha \varpi_i' + \beta \chi_i' + \gamma \sigma_i',$$
$$\chi_i = \alpha' \varpi_i' + \beta' \chi_i' + \gamma' \sigma_i', \qquad (i = 1, 2, 3)$$
$$\sigma_i = \alpha'' \varpi_i' + \beta'' \chi_i' + \gamma'' \sigma_i'.$$

nous avons, à la place du dernier système, où figurent soit P_i', Q_i', R_i', soit P_i, Q_i, R_i, le suivant :

$$\mathfrak{L}_0=\sum_i\left[\frac{\partial\Pi_i}{\partial\rho_i}-P_i'\left(\frac{\partial\varpi_1'}{\partial\rho_i}+q_i\sigma_1'-r_i\chi_1'\right)-Q_i'\left(\frac{\partial\chi_1'}{\partial\rho_i}+r_i\varpi_1'-p_i\sigma_1'\right)-R_i'\left(\frac{\partial\sigma_1'}{\partial\rho_i}+p_i\chi_1'-q_i\varpi_1'\right)\right.$$
$$\left.+A_i'\,(\chi_1'\zeta_i-\sigma_1'\eta_i)+B_i'\,(\sigma_1'\xi_i-\varpi_1'\zeta_i)+C_i'\,(\varpi_1'\eta_i-\chi_1'\xi_i)\right],$$

avec deux équations analogues. Si l'on remarque que les fonctions ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i de λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{\partial\lambda_1}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_2}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_3}{\partial\rho_i}$ donnent lieu aux formules :

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial_j}+\chi_j'\zeta_i-\sigma_j'\eta_i=0,\qquad \frac{\partial p_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\varpi_j'}{\partial\rho_i}+q_i\sigma_j'-r_i\chi_j',$$
$$\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda_j}+\sigma_j'\xi_i-\varpi_j'\zeta_i=0,\qquad \frac{\partial q_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\chi_j'}{\partial\rho_i}+r_i\varpi_j'-p_i\sigma_j',$$
$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial\lambda_j}+\varpi_j'\eta_i-\chi_j'\xi_i=0,\qquad \frac{\partial r_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\sigma_j'}{\partial\rho_i}+p_i\chi_j'-q_i\varpi_j',$$

qui résultent des relations de définition des fonctions ϖ_i', χ_i' σ_i' et des neuf identités qu'elles vérifient, on peut donner au système précédent la nouvelle forme :

$$\mathfrak{L}_0=\sum_i\left[\frac{\partial\Pi_i}{\partial\rho_i}-A_i'\frac{\partial\xi_i}{\partial\lambda_1}-B_i'\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda_1}-C_i'\frac{\partial\zeta_i}{\partial\lambda_1}-P_i'\frac{\partial p_i}{\partial\lambda_1}-Q_i'\frac{\partial q_i}{\partial\lambda_1}-R_i'\frac{\partial r_i}{\partial\lambda_1}\right],$$

avec deux équations analogues.

3. Les équations que nous avons introduites précédemment constituent aussi la généralisation de celles que nous avons développées dans un travail antérieur (1) ; nous pouvons les transformer de façon à obtenir la généralisation des équations bien connues de la théorie de l'élasticité qui sont relatives à l'effort ; il nous suffira, à cet effet, de reprendre la méthode déjà employée dans le travail que nous venons de rappeler.

Pour abréger l'écriture, désignons, pour un instant, par $\mathfrak{X}_0'$, $\mathfrak{Y}_0'$, $\mathfrak{Z}_0'$, $\mathfrak{L}_0'$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{N}_0'$ les premiers membres des relations à transformer, qui renferment respectivement X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0 et observons qu'on peut résumer les douze relations que nous avons établies dans la suivante :

$$\iiint(\mathfrak{X}_0'\lambda_1+\mathfrak{Y}_0'\lambda_2+\mathfrak{Z}_0'\lambda_3+\mathfrak{L}_0'\mu_1+\mathfrak{M}_0'\mu_2+\mathfrak{N}_0'\mu_3)dx_0dy_0dz_0$$
$$-\iint\left\{(F_0-l_0A_1-m_0A_2-n_0A_3)\lambda_1+(G_0-l_0B_1-m_0B_2-n_0B_3)\lambda_2\right.$$
$$+(H_0-l_0C_1-m_0C_2-n_0C_3)\lambda_3+(I_0-l_0P_1-m_0P_2-n_0P_3)\mu_1$$
$$\left.+(J_0-l_0Q_1-m_0Q_2-n_0Q_3)\mu_2+(K_0-l_0R_1-m_0R_2-n_0R_3)\mu_3\right\}d\sigma_0=0,$$

où λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3, sont des fonctions arbitraires et où les intégrales sont relatives à la surface S_0 du milieu (M_0) et au domaine limité par elle. Appli-

(1) E. et F. Cosserat. — *Premier mémoire sur la théorie de l'élasticité* ; *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* (1), **10**, p. I_1 — I_{116}, 1896.

quant la formule de GREEN, la relation que nous venons d'écrire devient la suivante :

$$\iiint (X_0\lambda_1 + Y_0\lambda_2 + Z_0\lambda_3 + L_0\mu_1 + M_0\mu_2 + N_0\mu_3)dx_0dy_0dz_0$$

$$- \iint (F_0\lambda_1 + G_0\lambda_2 + H_0\lambda_3 + I_0\mu_1 + J_0\mu_2 + K_0\mu_3)d\sigma_0$$

$$+ \iiint \left(A_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_0} + B_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial y_0} + B_3\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_0}\right.$$
$$\left. + C_1\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial\lambda_3}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial z_0}\right)dx_0dy_0dz_0$$

$$+ \iiint \left(P_1\frac{\partial\mu_1}{\partial x_0} + P_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y_0} + P_3\frac{\partial\mu_1}{\partial z_0} + Q_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x_0} + Q_2\frac{\partial\mu_2}{\partial y_0} + Q_3\frac{\partial\mu_2}{\partial z_0}\right.$$
$$\left. + R_1\frac{\partial\mu_3}{\partial x_0} + R_2\frac{\partial\mu_3}{\partial y_0} + R_3\frac{\partial\mu_3}{\partial z_0}\right)dx_0dy_0dz_0$$

$$- \iiint \left(C_1\frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial y}{\partial z_0} + B_1\frac{\partial z}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial z}{\partial y_0} + B_3\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\mu_1 dx_0dy_0dz_0$$

$$- \iiint \left(A_1\frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial z}{\partial z_0} + C_1\frac{\partial x}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial x}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\mu_2 dx_0dy_0dz_0$$

$$- \iiint \left(B_1\frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial x}{\partial y_0} + B_3\frac{\partial x}{\partial z_0} + A_1\frac{\partial y}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial y}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\mu_3 dx_0dy_0dz_0 = 0.$$

Cherchons la transformée de cette dernière relation, lorsqu'on prend pour nouvelles variables les fonctions x, y, z de x_0, y_0, z_0. Si l'on désigne par φ une fonction quelconque de x_0, y_0, z_0 qui devient une fonction de x, y, z, les formules élémentaires du changement de variables sont :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_0},$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_0}.$$

Appliquons ces formules aux fonctions λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 ; S indiquant toujours la surface du milieu (M) qui correspond à la surface S_0 de (M_0), désignons de plus par X, Y, Z, L, M, N les projections sur Ox, Oy, Oz de la force extérieure et du moment extérieur appliqués au point M et rapportés à l'unité de volume du milieu déformé (M), et par F, G, H, I, J, K les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort et du moment de déformation, qui s'exercent au point M sur S, rapportés à l'unité d'aire de S. Introduisons enfin dix-huit

nouvelles auxiliaires p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}, p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}, q_{xx}, q_{yx}, q_{zx}, q_{xy}, q_{yy}, q_{zy}, q_{xz}, q_{yz}, q_{zz}, par les formules :

$$\Delta p_{xx} = A_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial x}{\partial z_0}, \quad \Delta q_{xx} = P_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial x}{\partial z_0},$$

$$\Delta p_{yx} = A_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial y}{\partial z_0}. \quad \Delta q_{yx} = P_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial y}{\partial z_0},$$

$$\Delta p_{zx} = A_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial z}{\partial z_0}, \quad \Delta q_{zx} = P_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

et par les analogues obtenues en remplaçant :

$$A_1, A_2, A_3, p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}, P_1, P_2, P_3, q_{xx}, q_{yx}, q_{zx},$$

respectivement par :

$$B_1, B_2, B_3, p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}, Q_1, Q_2, Q_3, q_{xy}, q_{yy}, q_{zy},$$

puis par :

$$C_1, C_2, C_3, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}, R_1, R_2, R_3, q_{xz}, q_{yz}, q_{zz}.$$

Nous obtenons la relation transformée :

$$\iiint (X\lambda_1 + Y\lambda_2 + Z\lambda_3 + L\mu_1 + M\mu_2 + N\mu_3)\,dxdydz$$

$$- \iint (F\lambda_1 + G\lambda_2 + H\lambda_3 + I\mu_1 + J\mu_2 + K\mu_3)\,d\sigma$$

$$+ \iiint \left(p_{xx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y} + p_{zx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} + p_{xy}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + p_{yy}\frac{\partial\lambda_2}{\partial y} + p_{zy}\frac{\partial\lambda_2}{\partial z} + p_{xz}\frac{\partial\lambda_3}{\partial x} + p_{yz}\frac{\partial\lambda_3}{\partial y} + p_{zz}\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$+ \iiint \left(q_{xx}\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + q_{yx}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + q_{zx}\frac{\partial\mu_1}{\partial z} + q_{xy}\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + q_{yy}\frac{\partial\mu_2}{\partial y} + q_{zy}\frac{\partial\mu_2}{\partial z} + q_{xz}\frac{\partial\mu_3}{\partial x} + q_{yz}\frac{\partial\mu_3}{\partial y} + q_{zz}\frac{\partial\mu_3}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$- \iiint \left\{(p_{yz} - p_{zy})\mu_1 + (p_{zx} - p_{xz})\mu_2 + (p_{xy} - p_{yx})\mu_3\right\} dxdydz = 0,$$

où les intégrales sont relatives à la surface S du milieu (M) et au domaine limité par elle, $d\sigma$ désignant l'élément d'aire de S.

Appliquons de nouveau la formule de Green aux termes qui renferment les dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 par rapport à x, y, z et désignons par l, m, n les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes, de la normale exté-

rieure à la surface S ; il vient, puisque λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 sont arbitraires :

$$\begin{aligned}
&F = lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx}, \qquad I = lq_{xx} + mq_{yx} + nq_{zx},\\
&G = lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy}, \qquad J = lq_{xy} + mq_{yy} + nq_{zy},\\
&H = lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz}, \qquad K = lq_{xz} + mq_{yz} + nq_{zz},\\
&\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} - X = 0,\\
&\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} - Y = 0,\\
&\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} - Z = 0,\\
&\frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z} + p_{yz} - p_{zy} - L = 0,\\
&\frac{\partial q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zy}}{\partial z} + p_{zx} - p_{xz} - M = 0,\\
&\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} + p_{xy} - p_{yx} - N = 0.
\end{aligned}$$

La signification des dix-huit nouvelles auxiliaires p_{xx}, ..., q_{xx}, ... résulte immédiatement des relations que nous venons de trouver. Il est clair, en effet, que les coefficients p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} de l dans les expressions de F, G, H représentent les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort qui s'exerce au point M sur une surface dont la normale intérieure est parallèle à Ox, et que les coefficients q_{xx}, q_{xy}, q_{xz} de l dans les expressions de I, J, K sont les projections sur Ox, Oy, Oz du moment de déformation en M relatif à la même surface. Les coefficients de m et de n donnent lieu à une interprétation analogue à l'égard de surfaces dont les normales intérieures sont parallèles à Oy et à Oz.

Les auxiliaires que nous venons d'introduire et les équations qui les lient ne paraissent pas avoir été jusqu'ici envisagées sous une forme aussi générale ; à notre connaissance, elles n'ont été considérées que dans le cas particulier où les neuf quantités q_{xx}, ..., q_{zz} sont nulles, et le premier travail qui traite alors de la question semble être celui de M. Voigt [1].

(1) Waldemar Voigt. — *Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle*, I, II, *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd. 34, 1887. Le premier paragraphe intitulé : *Ableitung der Grundgleichungen aus der Annahme mit Polarität begabter Moleküle*, a 49 pages (3-52) ; le deuxième intitulé : *Untersuchung des elastischen Verhaltens eines Cylinders aus krystallinischer Substanz, auf dessen Mantelfläche keine Kräfte wirken, wenn in seinem Innern wirkenden Spannungen längs der Cylinderaxe constant sind*, a 48 pages (53-100). On pourra également consulter le travail de M. Voigt : *L'état actuel de nos connaissances sur l'élasticité des cristaux* (Rapports présentés au Congrès international de Physique réuni à Paris en 1900, T. I, p. 277-347), où il est fait allusion à Poisson, *Mém. de l'Acad.*, T. XVIII, p. 3, 1842 (voir p. 289). Consulter aussi Larmor, *On the propagation of a disturbance in a gyrostatically loaded medium* (*Proc. Lond. Math. Soc.*, nov. 1891) ; Love, *Treatise on the mathematical theory of Elasticity* (*Camb. University Press*, 1re éd., 1892, 2e éd. 1906) ; Combebiac, *Sur les équations générales de l'élasticité*, *Bull. de la Soc. Math. de France*, T. XXX, p. 108-110 et p. 242-247, 1902.

Nous pouvons observer en terminant que si, dans les six équations qui renferment X, Y, Z, F, G, H, on effectue un changement de variables de façon à introduire les variables primitives x_0, y_0, z_0, on trouve immédiatement des équations dont les trois premières constituent la généralisation d'équations établies par M. Boussinesq.

54. Travail virtuel extérieur ; théorème analogue à ceux de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les §§ précédents. — Nous donnerons le nom de *travail virtuel extérieur* sur le milieu déformé (M), dans une déformation virtuelle quelconque, à l'expression

$$\delta\mathcal{T}_e = -\iint_{s_0}(F_0'\delta' x + G_0'\delta' y + H_0'\delta' z + I_0'\delta_I' + J_0'\delta_J' + K_0'\delta_K')\,d\sigma_0$$
$$+\iiint_{s_0}(X_0'\delta' x + Y_0'\delta' y + Z_0'\delta' z + L_0'\delta_I' + M_0'\delta_J' + N_0'\delta_K')\,dx_0dy_0dz_0.$$

Reportons-nous aux notations du § **50**, et désignons de plus par δ_I, δ_J, δ_K les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz' sont δ_I', δ_J', δ_K', en sorte que l'on a, par exemple :

$$-\delta_I = \alpha''\delta\alpha' + \beta''\delta\beta' + \gamma''\delta\gamma' = -(\alpha'\delta\alpha'' + \beta'\delta\beta'' + \gamma'\delta\gamma''),$$

en supposant toujours les axes que l'on considère de même disposition.

Cela étant, supposons au § **53** que l'on attribue aux arbitraires λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 la signification définie par les formules :

$$\lambda_1 = \delta x,\ \lambda_2 = \delta y,\ \lambda_3 = \delta z,\ \mu_1 = \delta_I,\ \mu_2 = \delta_J,\ \mu_3 = \delta_K.$$

Nous voyons alors que les relations obtenues précédemment entre les nouvelles auxiliaires introduites ne font qu'exprimer la condition suivante :

Quels que soient les déplacements virtuels du § **50** imprimés au milieu déformé, le travail virtuel extérieur $\delta\mathcal{T}_e$ est donné, soit par la relation :

$$\delta\mathcal{T}_e = -\iiint\left(p_{xx}\frac{\partial\delta x}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial\delta x}{\partial y} + p_{zx}\frac{\partial\delta x}{\partial z} + p_{xy}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + p_{yy}\frac{\partial\delta y}{\partial y} + p_{zy}\frac{\partial\delta y}{\partial z}\right.$$
$$\left. + p_{xz}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + p_{yz}\frac{\partial\delta z}{\partial y} + p_{zz}\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$-\iiint\left(q_{xx}\frac{\partial\delta_I}{\partial x} + q_{yx}\frac{\partial\delta_I}{\partial y} + q_{zx}\frac{\partial\delta_I}{\partial z} + q_{xy}\frac{\partial\delta_J}{\partial x} + q_{yy}\frac{\partial\delta_J}{\partial y} + q_{zy}\frac{\partial\delta_J}{\partial z}\right.$$
$$\left. + q_{xz}\frac{\partial\delta_K}{\partial x} + q_{yz}\frac{\partial\delta_K}{\partial y} + q_{zz}\frac{\partial\delta_K}{\partial z}\right)dxdydz$$
$$+\iiint\left\{(p_{yz} - p_{zy})\delta_I + (p_{zx} - p_{xy})\delta_J + (p_{xy} - p_{yx})\delta_K\right\}dxdydz,$$

où les intégrales sont étendues au milieu déformé, soit par la relation :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C}_e = &-\iiint \Big(A_1\frac{\partial\delta x}{\partial x_0}+A_2\frac{\partial\delta x}{\partial y_0}+A_3\frac{\partial\delta x}{\partial z_0}+B_1\frac{\partial\delta y}{\partial x_0}+B_2\frac{\partial\delta y}{\partial y_0}+B_3\frac{\partial\delta y}{\partial z_0}\\ &\qquad +C_1\frac{\partial\delta z}{\partial x_0}+C_2\frac{\partial\delta z}{\partial y_0}+C_3\frac{\partial\delta z}{\partial z_0}\Big)\,dx_0dy_0dz_0\\ &-\iiint\Big(P_1\frac{\partial\delta_I}{\partial x_0}+P_2\frac{\partial\delta_I}{\partial y_0}+P_3\frac{\partial\delta_I}{\partial z_0}+Q_1\frac{\partial\delta_J}{\partial x_0}+Q_2\frac{\partial\delta_J}{\partial y_0}+Q_3\frac{\partial\delta_J}{\partial z_0}\\ &\qquad +R_1\frac{\partial\delta_K}{\partial x_0}+R_2\frac{\partial\delta_K}{\partial y_0}+R_3\frac{\partial\delta_K}{\partial z_0}\Big)\,dx_0dy_0dz_0\\ &+\iiint\Big(C_1\frac{\partial y}{\partial x_0}+C_2\frac{\partial y}{\partial y_0}+C_3\frac{\partial y}{\partial z_0}-B_1\frac{\partial z}{\partial x_0}-B_2\frac{\partial z}{\partial y_0}-B_3\frac{\partial z}{\partial z_0}\Big)\,\delta_I\,dx_0dy_0dz_0\\ &+\iiint\Big(A_1\frac{\partial z}{\partial x_0}+A_2\frac{\partial z}{\partial y_0}+A_3\frac{\partial z}{\partial z_0}-C_1\frac{\partial x}{\partial x_0}-C_2\frac{\partial x}{\partial y_0}-C_3\frac{\partial x}{\partial z_0}\Big)\,\delta_J\,dx_0dy_0dz_0\\ &+\iiint\Big(B_1\frac{\partial x}{\partial x_0}+B_2\frac{\partial x}{\partial y_0}+B_3\frac{\partial x}{\partial z_0}-A_1\frac{\partial y}{\partial x_0}-A_2\frac{\partial y}{\partial y_0}-A_3\frac{\partial y}{\partial z_0}\Big)\,\delta_K\,dx_0dy_0dz_0,\end{aligned}$$

où les intégrales sont étendues au milieu non déformé, car la formule

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C}_e = &-\iint_{s_0}(F_0'\delta'x+G_0'\delta'y+H_0'\delta'y+I_0'\delta_I'+J_0'\delta_J'+K_0'\delta_K')\,d\sigma_0\\ &+\iiint_{s_0}(X_0'\delta'x+Y_0'\delta'y+Z_0'\delta'z+L_0'\delta_I'+M_0'\delta_J'+N_0'\delta_K')\,dx_0dy_0dz_0\end{aligned}$$

donnée plus haut, pour servir de définition au travail virtuel extérieur, peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C}_e = &-\iint_{s_0}(F_0\delta x+G_0\delta y+H_0\delta z+I_0\delta_I+J_0\delta_J+K_0\delta_K)\,d\sigma_0\\ &+\iiint_{s_0}(X_0\delta x+Y_0\delta y+Z_0\delta z+L_0\delta_I+M_0\delta_J+N_0\delta_K)\,dx_0dy_0dz_0,\end{aligned}$$

en vertu de la signification de X_0, Y_0, ... N_0, F_0, G_0, ... K_0, et également

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{C}_e = &-\iint_{s}(F\delta x+G\delta y+H\delta z+I\delta_I+J\delta_J+K\delta_K)\,d\sigma_0\\ &+\iiint_{s}(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z+L\delta_I+M\delta_J+N\delta_K)\,dxdydz,\end{aligned}$$

en vertu de la signification de X, Y, ... N, F, G, ... K.

Partons de la formule :

$$\iiint_{s_0}\delta W\,dx_0dy_0dz_0+\delta\mathcal{C}_e=0,$$

appliquée à une portion quelconque du milieu limitée par une surface S_0.

Comme δW doit être identiquement nul, en vertu de l'invariance de W dans le groupe des déplacements euclidiens, quand les variations δx, δy, δz sont données par les formules (51), savoir :

$$\begin{aligned}\delta x &= (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\delta t,\\ \delta y &= (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\delta t,\\ \delta z &= (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\delta t,\end{aligned}$$

et δ_{I}, δ_{J}, δ_{K} par

$$\delta_{\mathrm{I}} = \omega_1 \delta t, \qquad \delta_{\mathrm{J}} = \omega_2 \delta t, \qquad \delta_{\mathrm{K}} = \omega_3 \delta t,$$

et cela, quelles que soient les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3, nous en concluons, d'après les expressions de $\delta \mathcal{T}_e$, sur lesquelles (1) nous venons d'insister, que l'on a :

$$\iint_{S_0} F_0 d\sigma_0 - \iiint_{S_0} X_0 dx_0 dy_0 dz_0 = 0,$$

$$\iint_{S_0} (I_0 + H_0 y - G_0 z) d\sigma_0 - \iiint_{S_0} (L_0 + Z_0 y - Y_0 z) dx_0 dy_0 dz_0 = 0,$$

et quatre équations analogues. Ces six formules se déduisent facilement de celles que l'on écrit d'ordinaire au moyen du principe de solidification.

On peut concevoir, dans ces formules, que la frontière S_0 est variable.

Les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents ne sont pas les seules que l'on pourrait envisager ; en nous bornant à leur considération, nous ajouterons simplement quelques remarques faciles.

Nous avons en définitive introduit deux systèmes d'efforts et de moments de déformation relatifs à un point M du milieu déformé ; les premiers sont ceux qui s'exercent sur des surfaces qui, avant déformation, ont leur normale parallèle à l'un des axes fixes Ox, Oy, Oz ; les seconds sont ceux qui s'exercent sur des surfaces qui ont leur normale parallèle à l'un des mêmes axes fixes Ox, Oy, Oz.

Les formules que nous avons indiquées donnent les derniers éléments au moyen des premiers ; mais, par une résolution immédiate, sur laquelle nous ne nous arrêterons pas, on obtient inversement les premiers éléments au moyen des seconds.

Supposons maintenant que l'on introduise la fonction W ; les premiers efforts et moments de déformation ont des expressions déjà données, et on en déduit immédiatement les expressions relatives aux seconds. Mais, dans ces calculs, on peut expliciter les fonctions que l'on veut mettre en évidence,

(1) Le passage des éléments rapportés aux unités de volume du milieu non déformé et d'aire de la frontière S_0, aux éléments rapportés aux unités de volume du milieu déformé et d'aire de la frontière S est tellement immédiat, qu'il suffit de se borner, comme nous le faisons, aux premiers, par exemple.

suivant la nature du problème, et qui seront, *par exemple*, x, y, z ou x', y', z' et trois paramètres (1) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, au moyen desquels on exprime $\alpha, \alpha' \ldots \gamma''$.

Si l'on introduit $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, et si l'on continue de désigner par W la fonction portant sur x_0, y_0, z_0, sur les dérivées premières de x, y, z par rapport à x_0, y_0, z_0, sur $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et sur leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0, obtenue en remplaçant, dans la fonction $W(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i)$, les différentes quantités $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i$ par leurs valeurs données par les formules (43) et (44), on aura :

$$A_1 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial x_0}}, \quad A_2 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial y_0}}, \quad A_3 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial z_0}},$$

$$B_1 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial x_0}}, \quad B_2 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial y_0}}, \quad B_3 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial y}{\partial z_0}},$$

$$C_1 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial x_0}}, \quad C_2 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial y_0}}, \quad C_3 = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial z}{\partial z_0}},$$

$$\Pi_i = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial p_i}}, \quad X_i = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial p_i}}, \quad \Sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial p_i}},$$

55. Notion de l'énergie de déformation. Théorème qui conduit, comme cas particulier, à celui de Clapeyron. — Envisageons les deux états (M_0) et (M) du milieu déformable limités par les surfaces (S_0) et (S), et considérons une suite quelconque d'états partant de (M_0) pour aboutir à (M) : il suffit à cet effet de considérer des fonctions $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ de x_0, y_0, z_0 et d'une variable h qui, pour la valeur zéro de la variable h, se réduisent respectivement à $x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \alpha_0', \ldots, \gamma_0''$ et pour la valeur h de h, se réduisent respectivement aux valeurs $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots \gamma''$ relatives à (M).

En faisant varier le paramètre h de o à h d'une façon continue, nous obtenons une déformation continue, permettant de passer de l'état (M_0) à l'état (M). Considérons, dans cette déformation continue, le *travail total* effectué par les forces et les moments extérieurs appliqués aux différents éléments de volume du milieu et par les efforts et moments de déformation appliqués aux différents éléments superficiels de la frontière ; il suffit, pour obtenir ce travail total, d'intégrer de o à h la différentielle obtenue, en partant de l'une des expressions de $\delta\mathcal{C}_e$ du paragraphe précédent, et en y substituant aux variations de $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ les différentielles partielles qui correspondent à l'accroissement dh de h ; la formule

$$\delta\mathcal{C}_e = -\iiint_{S_0} \delta W dx_0 dy_0 dz_0,$$

(1) Comme telles auxiliaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, on peut prendre, par exemple, les composantes de la rotation, qui amène les axes Ox, Oy, Oz à être parallèles respectivement à Mx', My', Mz'.

donnant pour la valeur actuelle de $\delta\mathcal{T}_e$ l'expression $-\iiint_{s_0}\frac{\partial W}{\partial h}\,dh dx_0 dy_0 dz_0$, nous obtenons pour le travail total

$$-\int_0^h\left(\iiint_{s_0}\frac{\partial W}{\partial h}\,dx_0 dy_0 dz_0\right)dh=-\iiint_{s_0}(W_M-W_{M_0})\,dx_0 dy_0 dz_0.$$

Le travail considéré est indépendant des états intermédiaires et ne dépend que des états extrêmes considérés (M_0) et (M).

Ceci conduit à introduire la notion d'*énergie de déformation*, qui doit être distinguée de celle de l'action envisagée précédemment ; nous dirons que $-W$ est la densité de l'*énergie de déformation*, rapportée à l'unité de volume du milieu non déformé.

La proposition que nous venons de rencontrer, qui détermine le *travail total*, effectué par les forces et les moments extérieurs, ainsi que par les efforts et les moments de déformation appliqués à la frontière, donne, par la considération de la déformation infiniment petite et par la particularisation du milieu, le *théorème de* Clapeyron [1]. En effet, introduisons d'abord simplement l'hypothèse, sur laquelle nous reviendrons au § **58** sous forme plus générale, savoir que W est une simple fonction de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; nous pouvons alors envisager les formules :

$$\Omega_1=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_1},\quad \Omega_2=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_2},\quad \Omega_3=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_3},\quad \Xi_1=\frac{\partial W}{\partial\gamma_1},\quad \Xi_2=\frac{\partial W}{\partial\gamma_2},\quad \Xi_3=\frac{\partial W}{\partial\gamma_3},$$

comme définissant un changement de variables remplaçant les lettres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par les lettres $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$. En vertu de ce changement de variables, W devient une fonction W' de $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Xi_1, \Xi_2, \Xi_3$.

Ceci posé, passons à la déformation infiniment petite, et plaçons-nous dans le cas envisagé au § **31**, p. 74-76 de notre *Premier Mémoire sur la théorie de l'élasticité* ; W et W' deviennent des formes quadratiques W_2 de $e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3$ et W_2' de $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$, cette dernière étant au facteur $\frac{1}{4}$ près ce qu'on appelle la forme adjointe de W_2 ; nous obtenons, pour le travail total dont il a été question, et dans le cas de la déformation infiniment petite, l'expression

$$\iiint W_2\,dx_0 dy_0 dz_0,$$

Particularisons encore et supposons que l'on ait [2] :

$$W_2(e_i,g_i)=-\left(\frac{\lambda}{2}+\mu\right)(e_1+e_2+e_3)^2-\frac{\mu}{2}(g_1^2+g_2^2+g_3^2-4e_2e_3-4e_3e_1-4e_1e_2),$$

[1] C'est Lamé qui semble s'être chargé, dans sa Note des *Comptes rendus*, T. XXXV, p. 459-464, 1852, puis dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1re éd., 1852, 2e éd., 1866), de faire connaître le théorème de Clapeyron ; ce n'est que le 1er février 1858, en effet, qu'a paru la note suivante : Clapeyron, *Mémoire sur le travail des forces élastiques, dans un corps solide déformé par l'action de forces extérieures*, *Comptes rendus*, T. XLVI, p. 208, 1858. Consulter aussi Todhunter et Pearson, *A History of the Theory of Elasticity*, etc., §§ **1041** et **1067-1070**.

[2] E. et F. Cosserat. — *Premier mémoire sur la théorie de l'élasticité*, p. 77.

nous aurons

$$W_2'(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{T}_i) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathfrak{N}_1^2+\mathfrak{N}_2^2+\mathfrak{N}_3^2}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu}\frac{(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\mathfrak{N}_3)^2}{3\lambda+2\mu} + \frac{\mathfrak{T}_1^2+\mathfrak{T}_2^2+\mathfrak{T}_3^2}{\mu}\right\},$$

ou

$$W_2'(\mathfrak{N}_i, \mathfrak{T}_i) = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda+2\mu}(\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2+\mathfrak{N}_3)^2 - \frac{1}{\mu}(\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_3+\mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2-\mathfrak{T}_1^2-\mathfrak{T}_2^2-\mathfrak{T}_3^2)\right\}.$$

On voit que l'on retrouve exactement le résultat de LAMÉ, si l'on remarque que, dans le cas de la déformation infiniment petite, le travail total des forces extérieures et des efforts à la frontière se réduit évidemment à l'expression qu'il indique.

56. Etat naturel du milieu déformable. — Dans ce qui précède, nous sommes partis d'un état dit naturel du milieu déformable, et nous nous sommes donnés un état dit déformé ; nous avons indiqué des formules permettant de calculer la force extérieure et les éléments analogues dès que, au milieu déformable, est adjointe la fonction W représentant l'action de déformation en un point.

Arrêtons-nous un instant, comme précédemment, sur cette notion d'*état naturel*.

Ce dernier est jusqu'ici un état qui n'a subi aucune déformation. Concevons que les fonctions x, y, z, α, α', ... γ'', qui déterminent l'état déformé, dépendent d'un paramètre, et que, pour une valeur particulière de ce paramètre, on retrouve l'état naturel ; ce dernier nous apparaît alors comme un cas particulier de l'état déformé, et nous sommes amenés à essayer de lui appliquer les notions relatives à ce dernier.

On peut, sans changer les valeurs des éléments définis par les formules du § 52, remplacer la fonction W par cette fonction augmentée d'une fonction *déterminée* quelconque de x_0, y_0, z_0, et, si on se laisse inspirer par l'idée d'*action* que nous associons au passage de l'état naturel (M_0) à l'état déformé (M), on pourra, si l'on veut, supposer que *la fonction de* x_0, y_0, z_0 définie par l'expression :

$$W(x_0, y_0, z_0, \xi_i^{(0)}, \eta_i^{(0)}, \zeta_i^{(0)}, p_i^{(0)}, q_i^{(0)}, r_i^{(0)})$$

est identiquement nulle ; mais les valeurs obtenues, à l'égard de l'état naturel, pour la force extérieure et pour les éléments analogues, ne seront pas nécessairement nulles ; nous dirons qu'elles définissent la force extérieure et les éléments analogues relatifs à l'état naturel (1).

L'état naturel se présente, dans ce que nous venons de dire, comme l'état initial d'une suite d'états déformés, comme un état à partir duquel nous étu-

(1) Nous pouvons parler alors de force, d'effort, etc., parce que nous regardons l'état naturel comme la limite d'une suite d'états pour lesquels nous savons ce que c'est que la force, l'effort, etc., la force, l'effort, etc. n'étant définis pour nous jusqu'ici que lorsqu'il y a déformation capable de les manifester et de les mesurer.

dions la déformation ; on est par suite conduit à se demander s'il n'est pas possible de faire jouer à l'un des états déformés le rôle que nous avons fait jouer à l'état naturel, et cela de façon que les éléments définis au § **52** (force et moment extérieurs, effort et moment de déformation extérieurs), calculés pour les autres états déformés, aient la même valeur, si on rapporte les premiers de ces éléments à l'unité de volume du milieu déformé, et les seconds à l'unité d'aire d'une surface déformée. Cette question ne peut recevoir une réponse que si l'on introduit et si l'on précise la notion d'action correspondant au passage de l'état déformé à un autre état déformé.

L'hypothèse la plus simple consiste à admettre que cette dernière action s'obtient en retranchant l'action correspondant au passage de l'état naturel (M_0) au premier état déformé (M') de l'action correspondant au passage de l'état naturel (M_0) au second état déformé (M). Si nous désignons, à l'égard de (M'), par ξ_i', η_i', ζ_i', p_i', q_i', r_i' les quantités analogues [1] à ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i *relatives à* (M), on est alors conduit à adopter, comme action de déformation relative au passage de l'état (M') à l'état (M), l'expression

$$(52)\qquad \iiint_{S_0} \left\{ W(x_0,y_0,z_0,\xi_i,\eta_i,\zeta_i,p_i,q_i,r_i) - W(x_0,y_0,z_0,\xi_i',\eta_i',\zeta_i',p_i',q_i',r_i') \right\} dx_0 dy_0 dz_0,$$

que l'on peut écrire, si Δ' est la valeur de Δ pour (M') :

$$(53)\qquad \iiint_{S_0} W_0'(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i) \,|\, \Delta' \,|\, dx_0 dy_0 dz_0,$$

en désignant par S' la surface de (M') qui correspond à S_0 de (M_0), et par $W_0'(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i)$ l'expression

$$\left\{ W(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i) - W(x_0, y_0, z_0, \xi_i', \eta_i', \zeta_i', p_i', q_i', r_i') \right\} \frac{1}{|\Delta'|}.$$

On pourra d'ailleurs, si l'on veut, d'après la remarque faite au début de ce paragraphe, substituer à l'expression (53) la suivante :

$$(53')\qquad \iiint_{S_0} W'(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i) \,|\Delta'|\, dx_0 dy_0 dz_0$$

où $W'(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i)$ désigne l'expression

$$W(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i) \frac{1}{|\Delta'|}.$$

Si l'on remarque que l'on a, par exemple,

$$|\Delta'| \frac{\partial W'(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \dots r_i)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial W(x_0, y_0, z_0, \xi_i, \dots r_i)}{\partial \xi_i},$$

il est clair que l'application des formules analogues à celles du § **52** à l'expression (53) ou à l'expression (53'), en partant de (M') comme état naturel, *mais*

[1] On doit remarquer que ξ_i', η_i', ζ_i', p_i', q_i', r_i' ne sont pas les analogues de $\xi_i^{(0)}$, $\eta_i^{(0)}$, $\zeta_i^{(0)}$, $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$, car ils ne sont pas formés au moyen des coordonnées x', y', z' de (M') de la même façon que $\xi_i^{(0)}$, $\eta_i^{(0)}$, $\zeta_i^{(0)}$, $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$ le sont au moyen de x_0, y_0, z_0.

en supposant (M′) *rapporté au système de coordonnées* x_0, y_0, z_0 *et en admettant que les formules du* § **52** *sont modifiées en conséquence,* donne les mêmes valeurs de la force et du moment extérieurs relatifs à l'état (M), rapportés à l'unité de volume de (M), ainsi que les mêmes valeurs de l'effort et du moment de déformation rapportés à l'unité d'aire de (S).

Ainsi, nous pouvons considérer (M) comme un état déformé dont (M′) serait l'état naturel, pourvu que la fonction W associée à l'état (M) soit actuellement (1) W_0' ou W′.

Supposons que, conformément à ces indications, la force et le moment extérieurs soient, pour fixer les idées, donnés au moyen de simples fonctions de x_0, y_0, z_0 et des éléments qui fixent la position du trièdre $Mx'y'z'$. Supposons aussi que l'état naturel soit donné. Nous pouvons considérer les équations du § **52** relatives à la force et au moment extérieurs comme des équations aux dérivées partielles relatives aux inconnues x, y, z et à trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3 au moyen desquels on exprime α, α', ... γ'' ; les expressions ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i sont alors des fonctions de $\frac{\partial x}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial y}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho_i}$, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}$ (en posant toujours $\rho_1 = x_0$, $\rho_2 = y_0$, $\rho_3 = z_0$), que l'on calculera au moyen des formules (43) et (44).

Supposons que X_0', Y_0', Z_0', L_0', M_0', N_0', ou ce qui revient au même $X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0$, soient des fonctions données de $x_0, y_0, z_0, x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. L'expression W est, après substitution des valeurs de ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, tirées des formules (43) et (44), une fonction déterminée de x_0, y_0, z_0, $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial z_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_0}$, ..., $\frac{\partial \lambda_3}{\partial z_0}$, que nous continuerons à désigner par W, et les équations du problème peuvent s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial z_0}} = X_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial z_0}} = Y_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial z_0}} = Z_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial z_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \mathfrak{L}_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial z_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \mathfrak{M}_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial z_0}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \mathfrak{N}_0,$$

(1) Ceci nous permet, comme nous l'avons dit au début de ce paragraphe, de généraliser la notion d'état naturel que nous avons d'abord introduite. Au lieu de faire cor-

$\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ étant les fonctions de x_0, y_0, z_0, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 qui résultent des définitions du § 53.

Ceci résulte directement des formules des paragraphes précédents, soit d'une façon plus immédiate de ce que les formules de définition de X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ peuvent se résumer dans la relation

$$\delta \iiint W dx_0 dy_0 dz_0 + \delta \mathcal{C}_e = 0,$$

c'est-à-dire dans

$$\delta \iiint W dx_0 dy_0 dz_0 = \iint (F_0 \delta x + G_0 \delta y + H_0 \delta z + \mathfrak{I}_0 \delta\lambda_1 + \mathfrak{J}_0 \delta\lambda_2 + \mathfrak{K}_0 \delta\lambda_3) d\sigma$$
$$- \iiint (X_0 \delta x + Y_0 \delta y + Z_0 \delta z + \mathfrak{L}_0 \delta\lambda_1 + \mathfrak{M}_0 \delta\lambda_2 + \mathfrak{N}_0 \delta\lambda_3) dx_0 dy_0 dz_0.$$

57. Notions du trièdre caché et du W caché. — Dans l'étude du milieu déformable, il est naturel, comme dans celles de la ligne et de la surface déformables, de porter l'attention d'une façon particulière sur le *milieu ponctuel* dessiné par le milieu déformable ; ceci revient à envisager à part x, y, z et à considérer α, α', ..., γ'' comme de simples auxiliaires ; c'est ce que nous pouvons également exprimer en concevant que l'on ignore l'existence des trièdres, qui déterminent le milieu déformable, et que l'on ne connaisse que les sommets de ces trièdres. En nous plaçant à ce point de vue, pour envisager les équations aux dérivées partielles auxquelles on peut être conduit suivant les cas, nous pouvons introduire la notion du *trièdre caché*, et nous sommes conduits à une classification résultant des diverses circonstances qui peuvent se produire dans l'élimination de α, α', ..., γ''.

Une première étude qui se présente est donc celle des réductions qui peuvent avoir lieu dans l'élimination de α, α', ..., γ'' ; dans les cas particuliers correspondants, où l'attention est portée d'une manière presque exclusive sur le milieu ponctuel dessiné par le milieu déformé (M), on pourra même parfois faire abstraction de (M_0), et, par suite, de la déformation permettant de passer de (M_0) à (M).

Le trièdre peut être employé d'une autre façon, comme nous l'avons déjà dit pour la ligne et la surface déformables ; nous pouvons faire sur lui des hypothèses particulières, et de même sur le milieu (M) ; tout ceci revient à envisager des déformés particuliers du milieu déformable libre. Si les relations que nous imposons sont de simples relations entre ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, comme

respondre simplement à ce mot l'idée d'un état particulier nous pouvons, d'une façon plus générale, lui faire correspondre l'idée d'un état quelconque à partir duquel nous étudions la déformation. Le fait d'avoir introduit x_0, y_0, z_0 au début de la théorie semble faire jouer à (M_0) un rôle particulier ; mais on ne doit pas considérer x_0, y_0, z_0 autrement que comme des coordonnées servant à définir les *différents milieux* et non pas seulement (M_0) ; on a choisi ces coordonnées d'une façon particulière, et en liaison avec un milieu particulier (M_0), afin qu'on puisse ensuite porter l'attention sur (M_0), à propos de la déformation infiniment petite.

ce sera le cas dans les applications que nous aurons à étudier, nous pourrons tenir compte de ces relations dans le calcul de W et déduire de W des fonctions plus particulières : la question intéressante qui se posera sera d'introduire simplement ces formes particulières, et de considérer, en quelque sorte, comme cachée, la fonction W générale qui aura servi de point de départ. Nous aurons ainsi une *théorie qui sera spéciale aux déformés particuliers mis en évidence par les relations données entre* ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i.

Nous verrons que l'on peut ainsi, au moyen de la théorie du milieu déformable libre, rassembler à titre de cas particuliers, et comme provenant d'une même origine, les équations qui sont le résultat des théories spéciales que l'on rencontre dans la Physique (1).

Dans ces dernières, on se place quelquefois dans des circonstances propres à éviter la considération des déformations : en réalité, elles ont besoin d'être complétées ; c'est ce que l'on peut faire, dans les applications pratiques, en envisageant la déformation infiniment petite.

Prenons le cas où la force et le moment extérieurs ne renferment tout au plus que les dérivées premières des inconnues x, y, z et λ_1, λ_2, λ_3 ; les dérivées secondes de ces inconnues ne seront introduites dans les équations aux dérivées partielles que par W ; or les dérivées de x, y, z ne figurent que dans ξ_i, η_i, ζ_i, et celles de λ_1, λ_2, λ_3 ne se présentent que dans p_i, q_i, r_i. On voit donc que si W ne dépend que de ξ_i, η_i, ζ_i, ou ne dépend que de p_i, q_i, r_i, il y aura réduction dans les ordres des dérivées entrant dans le système d'équations aux dérivées partielles. Nous examinerons ici le premier de ces deux cas, qui correspond à la théorie ordinaire de l'élasticité des milieux matériels et à la théorie des différents milieux éthérés envisagés dans la doctrine des ondes lumineuses.

58. Cas où W ne dépend que de x_0, y_0, z_0, ξ_i, η_i, ζ_i et est indépendant de p_i, q_i, r_i. Comment on retrouve les équations relatives au corps déformable de la théorie classique et au milieu de l'Hydrostatique. — Supposons que W ne dépende que des quantités $x_0, y_0, z_0, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ et non des p_i, q_i, r_i ; les équations du § **56**, qui se réduisent aux suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial x_0}}+\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial y_0}}+\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial z_0}}=X_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}+\mathfrak{L}_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_0}}+\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial y_0}}+\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial z_0}}=Y_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}+\mathfrak{M}_0=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial x_0}}+\frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial y_0}}+\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial z_0}}=Z_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3}+\mathfrak{N}_0=0,$$

(1) Toutes nos considérations s'appliquent jusqu'ici aussi bien aux milieux matériels qu'aux différents milieux éthérés ; nous n'avons prononcé nulle part le mot *matière*, et ce que nous exposons est, comme nous l'avons dit au début, une *théorie de l'action sur l'étendue et le mouvement* ; pour avoir une idée plus complète de la notion de matière, nous aurons à expliquer plus tard comment on doit rapprocher cette dernière du concept d'*entropie*, suivant la vue profonde que Lippmann a introduite en Electricité.

dans lesquelles W ne dépend que de x_0, y_0, z_0, $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial z_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, nous montrent que, si nous prenons le cas simple où X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont des fonctions données (1) de x_0, y_0, z_0, x, y, z, $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial z_0}$, λ_1, λ_2, λ_3, les trois équations de droite peuvent être résolues par rapport à λ_1, λ_2, λ_3, et on obtient finalement trois équations aux dérivées partielles ne renfermant, avec nos hypothèses, que x_0, y_0, z_0, et que x, y, z et leurs dérivées premières et secondes.

Envisageons d'abord le cas particulier dans lequel les fonctions données $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont nulles ; il en sera de même pour les valeurs correspondantes des fonctions de l'un quelconque des systèmes (L_0', M_0', N_0'), (L_0, M_0, N_0), (L, M, N). Il en résulte que les équations :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 0$$

reviennent à

$$\begin{aligned}
C_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3 \frac{\partial y}{\partial z_0} - B_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} - B_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} - B_3 \frac{\partial z}{\partial z_0} &= 0, \\
A_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial z}{\partial z_0} - C_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} - C_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} - C_3 \frac{\partial x}{\partial z_0} &= 0, \\
B_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + B_3 \frac{\partial x}{\partial z_0} - A_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} - A_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} - A_3 \frac{\partial y}{\partial z_0} &= 0,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire à

$$p_{yz} = p_{zy}, \qquad p_{zx} = p_{xz}, \qquad p_{xy} = p_{yx},$$

dont l'interprétation est immédiate.

Ceci posé, observons que si l'on part de deux positions (M_0) et (M) supposées *données* et que l'on en déduise, comme au § **53**, les fonctions $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$, il peut arriver, dans le cas où ces trois fonctions sont nulles, que ce résultat se présente accidentellement, c'est-à-dire pour un certain ensemble de déformés particuliers ; mais il peut arriver que ce résultat se présente quel que soit le déformé (M), que ce soit une conséquence de la nature des milieux (M), c'est-à-dire de la forme de W.

Envisageons ce dernier cas, qui est particulièrement intéressant ; W est alors une simple fonction (2) de ρ_1, ρ_2, ρ_3 et des six expressions ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3 définies par les formules (45).

(1) Nous supposons qne X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne renferment pas de dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, pour simplifier l'exposition et pour indiquer plus facilement ce à quoi nous voulons faire allusion.

(2) Le trièdre est complètement caché ; nous pouvons aussi concevoir que nous ayons un milieu simplement ponctuel.

Les équations déduites des §§ **52** et **53** se réduisent soit à

$$\sum_i \left(\frac{\partial A_i'}{\partial \rho_i} + q_i C_i' - r_i B_i'\right) = X_0' \qquad F_0' = l_0 A_1' + m_0 A_2' + n_0 A_3',$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial B_i'}{\partial \rho_i} + r_i A_i' - p_i C_i'\right) = Y_0' \qquad G_0' = l_0 B_1' + m_0 B_2' + n_0 B_3',$$

$$\sum_i \left(\frac{\partial C_i'}{\partial \rho_i} + p_i B_i' - q_i A_i'\right) = Z_0' \qquad H_0' = l_0 C_1' + m_0 C_2' + n_0 C_3',$$

où l'on a :

$$\left.\begin{aligned} A_i' &= \xi_i \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \xi_k \frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \xi_j \frac{\partial W}{\partial \gamma_k} \\ B_i' &= \eta_i \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \eta_k \frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \eta_j \frac{\partial W}{\partial \gamma_k} \\ C_i' &= \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \zeta_k \frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \zeta_j \frac{\partial W}{\partial \gamma_k} \end{aligned}\right\} (i, j, k = 1, 2, 3),$$

soit encore à (1) :

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_0} + \frac{\partial A_2}{\partial y_0} + \frac{\partial A_3}{\partial z_0} = X_0, \qquad F_0 = l_0 A_1 + m_0 A_2 + n_0 A_3,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_0} + \frac{\partial B_2}{\partial y_0} + \frac{\partial B_3}{\partial z_0} = Y_0, \qquad G_0 = l_0 B_1 + m_0 B_2 + n_0 B_3,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_0} + \frac{\partial C_2}{\partial y_0} + \frac{\partial C_2}{\partial z_0} = Z_0, \qquad H_0 = l_0 C_1 + m_0 C_2 + n_0 C_3,$$

où l'on a

$$A_1 = \Omega_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \Xi_3 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \Xi_2 \frac{\partial x}{\partial z_0},$$

$$A_2 = \Xi_3 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \Omega_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \Xi_1 \frac{\partial x}{\partial z_0},$$

$$A_3 = \Xi_2 \frac{\partial x}{\partial x_0} + \Xi_1 \frac{\partial x}{\partial y_0} + \Omega_3 \frac{\partial x}{\partial z_0},$$

$$B_1 = \Omega_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + \Xi_3 \frac{\partial y}{\partial y_0} + \Xi_2 \frac{\partial y}{\partial z_0},$$

$$B_2 = \Xi_3 \frac{\partial y}{\partial x_0} + \Omega_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + \Xi_1 \frac{\partial y}{\partial z_0},$$

$$B_3 = \Xi_2 \frac{\partial y}{\partial x_0} + \Xi_1 \frac{\partial y}{\partial y_0} + \Omega_3 \frac{\partial y}{\partial z_0},$$

$$C_1 = \Omega_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + \Xi_3 \frac{\partial z}{\partial y_0} + \Xi_2 \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

$$C_2 = \Xi_3 \frac{\partial z}{\partial x_0} + \Omega_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + \Xi_1 \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

$$C_3 = \Xi_2 \frac{\partial z}{\partial x_0} + \Xi_1 \frac{\partial z}{\partial y_0} + \Omega_3 \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

(1) Comparer E. et F. Cosserat. — *Premier Mémoire sur la théorie de l'élasticité*, p. 45, 46, 65.

en posant, pour abréger l'écriture, $\Omega_i = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i}$, $\Xi_i = \frac{\partial W}{\partial \gamma_i}$, soit encore à (1) :

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} = X, \qquad F = l p_{xx} + m p_{yx} + n p_{zx},$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} = Y, \qquad G = l p_{xy} + m p_{yy} + n p_{zy},$$

$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = Z, \qquad H = l p_{xz} + m p_{yz} + n p_{zz},$$

où l'on a :

$$p_{xx} = \frac{1}{\Delta}\left[\Omega_1\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \Omega_2\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)^2 + \Omega_3\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)^2 + 2\Xi_1\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} + 2\Xi_2\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} + 2\Xi_3\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right],$$

et des formules analogues pour p_{yx}, ..., Δ ayant la signification que nous avons donnée au § 51 et que nous allons rappeler dans un instant.

Nous retrouvons, on le voit, le milieu continu déformable, dont il est question dans la théorie ordinaire de l'élasticité.

Un cas particulier intéressant s'obtient en cherchant pour quelle forme de W on a les identités :

$$p_{yz} = 0, \qquad p_{yx} = 0, \qquad p_{xy} = 0,$$

quels que soient $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ... On trouve que W doit être une simple fonction de x_0, y_0, z_0 et de l'expression Δ définie par les formules (2) :

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}, \qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} 1 + 2\varepsilon_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & 1 + 2\varepsilon_2 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & 1 + 2\varepsilon_3 \end{vmatrix},$$

ce que l'on peut voir, par exemple, en remarquant que si l'on se reporte aux formules données précédemment (3), qui fournissent p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}, ... en fonction de A_1, ..., on a :

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial x_0}}}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial x_0}}} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial y_0}}}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial y_0}}} = \frac{\dfrac{\partial W}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial z_0}}}{\dfrac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial x}{\partial z_0}}},$$

(1) Comparer E. et F. Cosserat. — *Premier Mémoire sur la théorie de l'élasticité*, p. 40, 44, 65.

(2) Comparer E. et F. Cosserat. — *Premier mémoire sur la théorie de l'élasticité*, p. 23, 24.

(3) Ces formules sont actuellement celles de la page 47 de notre *Premier mémoire sur la théorie de l'élasticité.*

et deux systèmes analogues ; W étant supposé une simple fonction de x_0, y_0, z_0 et de Δ, on a ensuite :

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = \frac{\partial W}{\partial \Delta}.$$

Si nous considérons le cas particulier dans lequel W ne dépend que de Δ, et si nous admettons que l'on nous donne X, Y, Z exprimés en fonction de x, y, z, les équations de la question, qui sont :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = X, \frac{\partial p}{\partial y} = Y, \frac{\partial p}{\partial z} = Z, F = lp, G = mp, H = np,$$

en posant $p = \frac{dW}{d\Delta}$, deviennent celles qui servent de base à l'hydrostatique (1) ; le milieu initial (M_0) n'apparaît que par Δ, et on peut remplacer l'inconnue Δ par l'inconnue p qui lui est liée par la relation $p = \frac{dW}{d\Delta}$. Si la fonction W n'est pas donnée, est *cachée*, on a les équations précédentes, où p est une auxiliaire dont la signification est bien connue.

Il nous suffira d'indiquer que le cas où les fonctions $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne sont pas nulles comprend la théorie de tous les milieux éthérés que depuis Mac-Cullagh jusqu'à Lord Kelvin on a considérés pour l'étude des ondes lumineuses, mais ici la théorie de ces milieux est complètement mécanique. Nous mentionnerons également que le cas plus général, où il reste, dans les expressions du moment extérieur, la trace des dérivées de l'action W par rapport aux rotations p_i, q_i, r_i, conduit de la manière la plus naturelle à la notion *d'induction magnétique* introduite par Maxwell.

59. Le corps invariable. — Nous avons considéré le cas particulier où W ne dépend pas de p_i, q_i, r_i et différentes particularisations de ce cas ; on peut, soit par l'étude de déformations particulières, soit par l'étude de nouveaux milieux définis par une théorie des liaisons qui profite des résultats déjà acquis parvenir à d'autres milieux considérés au moins en partie par les auteurs.

Partons, par exemple, du cas simple dans lequel le trièdre est *caché*, c'est-à-dire en définitive d'un milieu *ponctuel* dans lequel W est une fonction de x_0, y_0, z_0, ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3.

1. Nous pouvons concevoir que l'on porte l'attention uniquement sur les déformations du milieu pour lesquelles on a :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

Il suffit, dans les définitions des forces, etc., d'introduire ces hypothèses, et, si les forces sont données, d'introduire ces six conditions ; dans ce dernier cas, les problèmes *habituels* correspondant à la donnée de la fonction W et au cas général où les ε_i, γ_i ne sont pas nuls, ne peuvent se poser que si les données sont particulières.

(1) Comparer Duhem. — *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique.*

Si nous supposons que *seule*, la fonction W_0 obtenue en faisant $\varepsilon_2 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$ dans $W(\rho_1, \rho_2, \varepsilon_1 \ldots)$ est donnée, que l'on ne connaisse pas les valeurs des dérivées de W par rapport à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \gamma_3$, pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \gamma_3 = 0$, qu'ainsi W soit *cachée*, nous voyons que $p_{xx}, \ldots p_{zz}$, par exemple, deviennent six auxiliaires que l'on doit adjoindre à x, y, z; de sorte que, dans le cas où les forces agissant sur les éléments de volume sont données, nous avons neuf équations aux dérivées partielles à neuf inconnues, auxquelles on doit adjoindre des conditions accessoires.

Remarquons maintenant que l'on sait intégrer le système :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0;$$

la déformation étant supposée continue, l'intégrale correspond à un déplacement d'ensemble du milieu; il reste donc à déterminer les six constantes d'intégration et les auxiliaires $p_{xx}, \ldots$

Si les forces et les efforts qui agissent sur le milieu sont donnés, en supposant connus X ... en fonction de x, y, z, les six équations du § **54**, avec les simplifications apportées par la forme du W, appliquées au corps entier, détermineront les six constantes d'intégration; il ne restera donc, pour compléter, qu'à déterminer *ultérieurement* $p_{xx} \ldots$ On voit qu'en laissant de côté cette détermination ultérieure, nous retrouvons les problèmes habituels de la Mécanique des corps invariables, Mécanique dans laquelle on suppose peut-être plus ordinairement que la fonction W cachée ne dépend que de Δ.

2. Nous pouvons concevoir que l'on cherche à définir un milieu *sui generis* dont la définition tient déjà compte des conditions :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0.$$

Pour définir le nouveau milieu, en restant dans le même ordre d'idées que précédemment, nous définirons encore $F_0', \ldots N_0'$ par l'identité :

$$\iiint_{s_0} \delta W dx_0 dy_0 dz_0 = \iint_{s_0} (F_0' \delta' x + \ldots + K_0' \delta_K') \, d\sigma_0$$

$$- \iiint_{s_0} (X_0' \delta' x + \ldots + N_0' \delta_K') \, dx_0 dy_0 dz_0;$$

mais cette identité ne doit plus avoir lieu qu'en vertu de $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$; en d'autres termes, nous envisageons un milieu dont la théorie va résulter de l'adjonction *a posteriori* des conditions $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$ à la connaissance d'une fonction W $(x_0, y_0, z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \gamma_3)$ et de six fonctions auxiliaires $\mu_1, \ldots \mu_6$ de x_0, y_0, z_0, au moyen de l'identité :

$$\iiint_{s_0} (\delta W + \mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2 + \ldots + \mu_6 \gamma_3) dx_0 dy_0 dz_0 = \iint_{s_0} (F_0' \delta' x + \ldots) d\sigma_0$$

$$- \iiint_{s_0} (X_0' \delta' x + \ldots) \, dx_0 dy_0 dz_0$$

ceci revient à faire $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$, dans la théorie générale qui précède, où l'on a commencé à remplacer W par $W_1 = W + \mu_1\varepsilon_1 + \ldots + \mu_6\gamma_3$.

Nous retombons, on le voit, sur la *théorie du milieu élastique correspondant à la fonction* W_1 *de* $x_0, y_0, z_0, \varepsilon_1, \ldots \gamma_3$, *dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à* $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$. Si donc nous nous plaçons dans le cas du W_1 *caché*, si nous supposons que l'on connaît simplement la valeur $W_0(x_0, y_0, z_0)$ que prennent simultanément W et W_1 pour $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$, nous retrouvons la théorie qui comprend celle habituelle du corps invariable.

Observons que si, pour constituer le corps invariable, nous tenons, par un changement des auxiliaires, compte *a priori*, dans W, des conditions $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$, nous sommes conduits à remplacer, dans les calculs relatifs au milieu général, W par $\mu_1\varepsilon_1 + \ldots + \mu_6\gamma_3$, et nous trouvons également des formules qui ramènent aussi à l'étude d'un milieu élastique, dont on se borne à étudier les déformations qui correspondent à $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$; ces formules, en supposant $\mu_1, \ldots, \mu_6$ *non connus*, nous ramènent de nouveau à la théorie qui comprend celle habituelle du corps invariable. A ce dernier point de vue, nous revenons à l'exposition que l'on peut faire d'après les idées de Lagrange. Nous pouvons observer, en particulier, que dans le cas où X_0, Y_0, Z_0 sont données comme les dérivées partielles par rapport à x, y, z, d'une fonction φ de x_0, y_0, z_0, x, y, z, les équations dans lesquelles figurent X_0, Y_0, Z_0 ne sont autres que les équations auxquelles on est conduit en cherchant à déterminer un extremum de l'intégrale

$$\iiint \varphi dx_0 dy_0 dz_0,$$

sous les conditions

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,$$

3. Exposons un troisième procédé [1], pour constituer un milieu dont la théorie conduit toujours aux mêmes équations et qui sera un cas limite du milieu primitif. Ce procédé est à rapprocher du premier, et s'applique aussi aux différents cas de ligne et de surface déformables.

Concevons que le W qui sert de définition au milieu primitif soit variable, et, pour fixer les idées, supposons-le, pour les valeurs $\varepsilon_1, \ldots \gamma_3$ voisines de zéro, développable en série de Maclaurin par la formule :

$$W = W_1 + W_2 + \ldots + W_i + \ldots,$$

où W_i représente l'ensemble des termes du i^e degré. Admettons que les coefficients de W_2 (qui peuvent dépendre de x_0, y_0, z_0), dans leur variation, augmentent indéfiniment ; *si nous voulons que* W *conserve une valeur finie*, nous devons supposer que $\varepsilon_1, \ldots, \gamma_3$ tendent vers zéro ; autrement dit, nous ne pouvons alors considérer que les déformations qui satisfont à $\varepsilon_1 = \ldots = \gamma_3 = 0$; en

[1] Comparer Thomson et Tait. — *Treatise*, vol. I, Part. I, p. 271, à partir de la 11e ligne comptée du bas.

d'autres termes, le corps auquel nous parvenons à la limite ne peut prendre que des déplacements d'ensemble. Nous pouvons supposer que les dérivées $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}$, ... tendent vers des limites lorsque W, variant comme on vient de le dire, on fait varier également en conséquence une déformation étudiée de ce milieu.

Pour expliquer d'une façon plus précise ce qui précède, concevons que les coefficients de W_1, W_2, ... dépendent d'un paramètre h, de sorte que lorsque h tend vers zéro, ceux de W_2 augmentent indéfiniment; pour fixer les idées, supposons ces derniers coefficients linéaires par rapport à $\frac{1}{h}$; concevons également que x, y, z, qui définissent une déformation étudiée, varient avec h et de sorte que ε_1, ... tendent vers zéro; nous supposerons en outre que ε_1, ... sont infiniment petits du premier ordre par rapport à h, par exemple que ε_1, ... se développent suivant les puissances de h, les premiers termes du développement étant ceux en h. Dans ces conditions, W tendant vers zéro, $\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_1}$, ..., $\frac{\partial W}{\partial \gamma_3}$ tendent vers certaines limites (qui pourront être des fonctions de x_0, y_0, z_0); si donc, nous considérons les équations du § **52**, qui servent de définition à la force et au moment extérieurs, elles nous conduisent finalement à des formules permettant de les définir, et qui ne sont autres que les équations du point de départ, *dans lesquelles la notion de la fonction* W *a disparu*, et dans lesquelles figurent six auxiliaires F_0', G_0', H_0', I_0', J_0', K_0'.

60. Milieu déformable en mouvement. — La théorie du mouvement de la ligne déformable et celle du mouvement de la surface déformable se sont présentées très naturellement comme des particularisations de la théorie de la surface déformable et de celle du milieu déformable; il a suffi pour cela de donner à l'un des paramètres ρ_i de la surface ou du milieu la signification du temps. Comme nous n'envisageons pas ici la statique d'un milieu à plus de trois dimensions, nous devrons, dans ce qui suit, exposer directement la théorie du mouvement d'un milieu déformable; mais nous lui donnerons néanmoins une forme entièrement analogue à celle que nous avons indiquée pour la dynamique de la ligne déformable et de la surface déformable.

Considérons encore un espace (M_0) décrit par un point M_0, dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 par rapport à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz, et adjoignons à chaque point M_0 de l'espace (M_0) un trièdre trirectangle dont les axes M_0x_0, $M_0y'_0$, $M_0'z_0$ ont, par rapport aux axes Ox, Oy, Oz des cosinus directeurs qui sont respectivement α_0, α_0', α_0''; β_0, β_0', β_0''; γ_0, γ_0', γ_0'', et qui sont des fonctions des variables indépendantes x_0, y_0, z_0.

L'ensemble continu à trois dimensions de tels trièdres $M_0x_0'y_0'z_0'$ peut être considéré comme la position à un instant déterminé t_0 d'un milieu déformable défini de la façon suivante.

Donnons au point M_0 un déplacement M_0M fonction du temps t, de la position du point M_0 et s'annulant pour $t=t_0$; soient x, y, z les coordonnées du point M, que nous considérerons comme des fonctions de x_0, y_0, z_0, t. Impri-

mons en outre au trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ une rotation qui amènera finalement ses axes à être ceux d'un trièdre $Mx'y'z'$ que nous adjoindrons au point M ; nous définirons cette rotation en nous donnant, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz les cosinus directeurs α, α', α'' ; β, β', β'' ; γ, γ', γ'' des axes Mx', My', Mz' ; tous ces cosinus seront, comme x, y, z, des fonctions de x_0, y_0, z_0, t.

L'ensemble continu à trois dimensions des trièdres $Mx'y'z'$, pour une valeur donnée du temps t, sera ce que nous appellerons l'*état déformé* du milieu déformable considéré à cet instant t ; l'ensemble continu à quatre dimensions des trièdres $Mx'y'z'$ obtenu en faisant varier t sera la *trajectoire de l'état déformé* du milieu déformable.

Pour la commodité de l'écriture et des notations, nous introduirons parfois dans ce qui va suivre, comme nous l'avons déjà fait, au lieu de x_0, y_0, z_0, les lettres ρ_1, ρ_2, ρ_3. Nous continuerons de désigner par $\xi_i^{(0)}$, $\eta_i^{(0)}$, $\zeta_i^{(0)}$ les composantes de la vitesse de l'origine M_0 des axes M_0x_0', M_0y_0', M_0z_0' suivant ces axes, *quand* ρ_i *varie seul* et *par* $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$ les projections sur ces mêmes axes de la rotation instantanée du trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$ relative au paramètre ρ_i. Nous désignerons par ξ_i, η_i, ζ_i et par p_i, q_i r_i les quantités analogues pour le trièdre $Mx'y'z'$, lorsqu'on le rapporte, comme le trièdre $M_0x_0'y_0'z_0'$, au trièdre fixe $Oxyz$.

Quand le temps t varie, et que le mouvement du trièdre $Mx'y'z'$ est rapporté au trièdre fixe $Oxyz$, l'origine M a une vitesse dont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz', seront désignées par ξ, η, ξ, et la rotation instantanée du trièdre $Mx'y'z'$ sera définie par les composantes p, q, r.

Les éléments que nous venons d'introduire se calculent comme au § **49** ; on a d'abord les formules :

$$(54)\quad \begin{cases} \xi_i = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \alpha' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \alpha'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \\ \eta_i = \beta \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \beta' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \beta'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \\ \zeta_i = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \gamma' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \gamma'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, \end{cases} \qquad (55)\quad \begin{cases} p_i = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i}, \\ q_i = \sum \alpha \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} = -\sum \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i}, \\ r_i = \sum \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} = -\sum \alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i}. \end{cases}$$

auxquelles s'ajoutent les suivantes :

$$(54')\quad \begin{cases} \xi = \alpha \dfrac{dx}{dt} + \alpha' \dfrac{dy}{dt} + \alpha'' \dfrac{dz}{dt}, \\ \eta = \beta \dfrac{dx}{dt} + \beta' \dfrac{dy}{dt} + \beta'' \dfrac{dz}{dt}, \\ \zeta = \gamma \dfrac{dx}{dt} + \gamma' \dfrac{dy}{dt} + \gamma'' \dfrac{dz}{dt}, \end{cases} \qquad (55')\quad \begin{cases} p = \sum \gamma \dfrac{d\beta}{dt} = -\sum \beta \dfrac{d\gamma}{dt}, \\ q = \sum \alpha \dfrac{d\gamma}{dt} = -\sum \gamma \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ r = \sum \beta \dfrac{d\alpha}{dt} = -\sum \alpha \dfrac{d\beta}{dt}, \end{cases}$$

en introduisant dès maintenant la distinction des notations pour les dérivées par rapport au temps suivant que l'on prend x_0, y_0, z_0, t ou x, y, z, t pour variables indépendantes.

Supposons qu'on imprime à chacun des trièdres de la trajectoire de l'état

déformé un déplacement infiniment petit pouvant varier d'une façon continue avec ces trièdres. Avec les mêmes notations qu'au § **50**, nous aurons :

$$\delta\alpha = \beta\delta_K' - \gamma\delta_J', \tag{56}$$

$$\delta' x = \delta x' + z'\delta_J' - y'\delta_K', \quad \delta' y = \delta y' + x'\delta_K' - z'\delta_I', \quad \delta' z = \delta z' + y'\delta_I' - x'\delta_J', \tag{57}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta\xi_i &= \gamma_i\delta_K' - \zeta_i\delta_J' + \frac{\partial\delta' x}{\partial\rho_i} + q_i\delta' z - r_i\delta' y, \\ \delta\gamma_i &= \zeta_i\delta_I' - \xi_i\delta_K' + \frac{\partial\delta' y}{\partial\rho_i} + r_i\delta' x - p_i\delta' z, \\ \delta\zeta_i &= \xi_i\delta_J' - \gamma_i\delta_I' + \frac{\partial\delta' z}{\partial\rho_i} + p_i\delta' y - q_i\delta' x, \end{aligned}\right. \tag{58}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta p_i &= \frac{\partial\delta_I'}{\partial\rho_i} + q_i\delta_K' - r_i\delta_J', \\ \delta q_i &= \frac{\partial\delta_J'}{\partial\rho_i} + r_i\delta_I' - p_i\delta_K', \\ \delta r_i &= \frac{\partial\delta_K'}{\partial\rho_i} + p_i\delta_J' - q_i\delta_I', \end{aligned}\right. \tag{59}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta\xi &= \eta\delta_K' - \zeta\delta_J' + \frac{d\delta' x}{dt} + q\delta' z - r\delta' y, \\ \delta\eta &= \zeta\delta_I' - \xi\delta_K' + \frac{d\delta' y}{dt} + r\delta' x - p\delta' z, \\ \delta\zeta &= \xi\delta_J' - \eta\delta_I' + \frac{d\delta' z}{dt} + p\delta' y - q\delta' x, \end{aligned}\right. \tag{58'}$$

$$\left\{\begin{aligned} \delta p &= \frac{d\delta_I'}{dt} + q\delta_K' - r\delta_J', \\ \delta q &= \frac{d\delta_J'}{dt} + r\delta_I' - p\delta_K', \\ \delta r &= \frac{d\delta_K'}{dt} + p\delta_J' - q\delta_I'. \end{aligned}\right. \tag{59'}$$

61. Action euclidienne de déformation et de mouvement sur un milieu déformable en mouvement. — Considérons une fonction W de *deux positions infiniment voisines* du trièdre $Mx'y'z'$, c'est-à-dire une fonction de x_0, y_0, z_0, t, de $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ et de leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0, t. Proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour que l'intégrale quadruple :

$$\iiiint W dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

étendue à une portion quelconque de l'espace (M_0) et à l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2, ait une variation nulle, quand on soumet l'ensemble de tous les trièdres de ce que nous avons appelé la trajectoire du milieu déformable, pris dans son état déformé, *à une même transformation infinitésimale quelconque du groupe des déplacements euclidiens.*

Il s'agit, en définitive, de déterminer W de façon que l'on ait :

$$\delta W = 0,$$

lorsque, d'une part, l'origine M du trièdre $Mx'y'z'$ subit un déplacement infiniment petit, dont les projections δx, δy, δz sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\left\{\begin{aligned} \delta x &= (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\delta t, \\ \delta y &= (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\delta t, \\ \delta z &= (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\delta t, \end{aligned}\right. \tag{60}$$

où $a_1, a_2, a_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ sont six constantes arbitraires et δt une quantité infiniment petite indépendante de x_0, y_0, z_0, t, et lorsque, d'autre part, ce trièdre $Mx'y'z'$ subit une rotation infiniment petite, dont les composantes suivant les axes Ox, Oy, Oz sont :

$$\omega_1\delta t, \quad \omega_2\delta t, \quad \omega_3\delta t.$$

Il nous suffit de répéter le raisonnement que nous avons fait déjà à plusieurs reprises, pour voir que *la fonction W cherchée a la forme remarquable* :

$$W(x_0, y_0, z_0, t, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i, \xi, \eta, \zeta, p, q, r),$$

analogue à celle rencontrée pour la ligne, la surface et le milieu déformables en repos.

Nous dirons que l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt$$

est l'*action de déformation et de mouvement*, à l'intérieur de la surface S, sur le milieu déformé en mouvement et dans l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2. Nous dirons d'autre part que W est la *densité* de l'action de déformation et de mouvement, *en un point* du milieu déformé pris *à un instant donné*, rapportée à l'unité de volume du milieu non déformé et à l'unité de temps ; en donnant à Δ la même signification qu'au § **51**, $\frac{W}{|\Delta|}$ est la densité de cette action en un point et à un instant donnés, rapportée à l'unité de volume du milieu déformé et à l'unité de temps.

62. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort, le moment de déformation, la quantité de mouvement et le moment de quantité de mouvement du milieu déformé en mouvement, en un point et à un instant donnés. — Considérons une variation *quelconque* de l'action de déformation et de mouvement à l'intérieur d'une surface (S) du milieu (M) et dans l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2, savoir :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} \Big\{ \sum \Big(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \delta \xi_i + \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \delta \eta_i + \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} \delta \zeta_i + \frac{\partial W}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial W}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial W}{\partial r_i} \delta r_i \Big) + \frac{\partial W}{\partial \xi} \delta \xi + \frac{\partial W}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial W}{\partial \zeta} \delta \zeta + \frac{\partial W}{\partial p} \delta p + \frac{\partial W}{\partial q} \delta q + \frac{\partial W}{\partial r} \delta r \Big\} dx_0 dy_0 dz_0 dt.$$

Nous pouvons l'écrire, en vertu des formules (58), (58′), (59), (59′),

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} \Big\{ \sum \Big[& \frac{\partial W}{\partial \xi_i} (\eta_i \delta_K' - \zeta_i \delta_J' + \frac{\partial \delta' x}{\partial \rho_i} + q_i \delta' z - r_i \delta' y) \\
& + \frac{\partial W}{\partial \eta_i} (\zeta_i \delta_I' - \xi_i \delta_K' + \frac{\partial \delta' y}{\partial \rho_i} + r_i \delta' x - p_i \delta' z) + \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} (\xi_i \delta_J' - \eta_i \delta_I' + \frac{\partial \delta' z}{\partial \rho_i} + p_i \delta' y - q_i \delta' x) \\
& + \frac{\partial W}{\partial p_i} \Big(\frac{\partial \delta_I'}{\partial \rho_i} + q_i \delta_K' - r_i \delta_J' \Big) + \frac{\partial W}{\partial q_i} \Big(\frac{\partial \delta_J'}{\partial \rho_i} + r_i \delta_I' - p_i \delta_K' \Big) + \frac{\partial W}{\partial r_i} \Big(\frac{\partial \delta_K'}{\partial \rho_i} + p_i \delta_J' - q_i \delta_I' \Big) \Big] \\
& + \frac{\partial W}{\partial \xi} (\eta \delta_K' - \zeta \delta_J' + \frac{d \delta' x}{dt} + q \delta' z - r \delta' y) + \frac{\partial W}{\partial \eta} (\zeta \delta_J' - \xi \delta_K' + \frac{d \delta' y}{dt} + r \delta' x - p \delta' z) \\
& + \frac{\partial W}{\partial \zeta} (\xi \delta_J' - \eta \delta_I' + \frac{d \delta' z}{dt} + p \delta' y - q \delta' x) + \frac{\partial W}{\partial p} \Big(\frac{d \delta_I'}{dt} + q \delta_K' - r \delta_J' \Big) \\
& + \frac{\partial W}{\partial q} \Big(\frac{d \delta_J'}{dt} + r \delta_I' - p \delta_K' \Big) + \frac{\partial W}{\partial r} \Big(\frac{d \delta_K'}{dt} + p \delta_J' - q \delta_I' \Big) \Big\} dx_0 dy_0 dz_0 dt.
\end{aligned}$$

Appliquons la formule de GREEN aux termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport à une des variables ρ_1, ρ_2, ρ_3 et effectuons une intégration par parties sur les termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport au temps t ; il vient, en désignant par l_0, m_0, n_0 les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, de la normale extérieure à la surface S_0, qui limite le milieu avant déformation à l'instant t, et par $d\sigma_0$ l'élément d'aire de cette surface :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} W\,dx_0dy_0dz_0dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}\Big\{\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial\xi_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\xi_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\xi_3}\Big)\delta' x+\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial\eta_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\eta_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\eta_3}\Big)\delta' y$$

$$+\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_3}\Big)\delta' z+\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial p_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial p_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial p_3}\Big)\delta\mathrm{I}'$$

$$+\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial q_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial q_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial q_3}\Big)\delta\mathrm{J}'+\Big(l_0\frac{\partial W}{\partial r_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial r_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial r_3}\Big)\delta\mathrm{K}'\Big\}d\sigma_0dt$$

$$+\Big\{\iiint_{s_0}\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi}\delta' x+\frac{\partial W}{\partial\eta}\delta' y+\frac{\partial W}{\partial\zeta}\delta' z+\frac{\partial W}{\partial p}\delta\mathrm{I}'+\frac{\partial W}{\partial q}\delta\mathrm{J}'+\frac{\partial W}{\partial r}\delta\mathrm{K}'\Big)dx_0dy_0dz_0\Big\}_{t_1}^{t_2}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\Big\{\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial\xi_i}+q_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\Big)+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\xi}+q\frac{\partial W}{\partial\zeta}-r\frac{\partial W}{\partial\eta}\Big]\delta' x$$

$$+\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial\eta_i}+r_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}-p_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\Big)+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\eta}+r\frac{\partial W}{\partial\xi}-p\frac{\partial W}{\partial\zeta}\Big]\delta' y$$

$$+\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}+p_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}-q_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\Big)+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial\zeta}+p\frac{\partial W}{\partial\eta}-q\frac{\partial W}{\partial\xi}\Big]\delta' z$$

$$+\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial p_i}+q_i\frac{\partial W}{\partial r_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial q_i}+\eta_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\Big)$$

$$+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial p}+q\frac{\partial W}{\partial r}-r\frac{\partial W}{\partial q}+\eta\frac{\partial W}{\partial\zeta}-\zeta\frac{\partial W}{\partial\eta}\Big]\delta\mathrm{I}'$$

$$+\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial q_i}+r_i\frac{\partial W}{\partial p_i}-p_i\frac{\partial W}{\partial r_i}+\zeta_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}-\xi_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\Big)$$

$$+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q}+r\frac{\partial W}{\partial p}-p\frac{\partial W}{\partial r}+\zeta\frac{\partial W}{\partial\xi}-\xi\frac{\partial W}{\partial\zeta}\Big]\delta\mathrm{J}'$$

$$+\Big[\sum\Big(\frac{\partial}{\partial\rho_i}\frac{\partial W}{\partial r_i}+p_i\frac{\partial W}{\partial q_i}-q_i\frac{\partial W}{\partial p_i}+\xi_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}-\eta_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\Big)$$

$$+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r}+p\frac{\partial W}{\partial q}-q\frac{\partial W}{\partial p}+\xi\frac{\partial W}{\partial\eta}-\eta\frac{\partial W}{\partial\xi}\Big]\delta\mathrm{K}'\Big\}dx_0dy_0dz_0dt.$$

Posons, comme au § **52**,

$$\mathrm{F}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial\xi_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\xi_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\xi_3},\qquad \mathrm{I}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial p_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial p_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial p_3},$$

$$\mathrm{G}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial\eta_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\eta_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\eta_3},\qquad \mathrm{J}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial q_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial q_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial q_3},$$

$$\mathrm{H}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial\zeta_3},\qquad \mathrm{K}_0' = l_0\frac{\partial W}{\partial r_1}+m_0\frac{\partial W}{\partial r_2}+n_0\frac{\partial W}{\partial r_3},$$

et en outre

$$A' = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad B' = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad C' = \frac{\partial W}{\partial \zeta},$$
$$P' = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad Q' = \frac{\partial W}{\partial q}, \quad R' = \frac{\partial W}{\partial r};$$

posons d'autre part :

$$X_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \xi_i} + q_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - r_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \xi} + q\frac{\partial W}{\partial \zeta} - r\frac{\partial W}{\partial \eta},$$
$$Y_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \eta_i} + r_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i} - p_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \eta} + r\frac{\partial W}{\partial \xi} - p\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$
$$Z_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i} - q_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \zeta} + p\frac{\partial W}{\partial \eta} - q\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$L_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i\frac{\partial W}{\partial r_i} - r_i\frac{\partial W}{\partial q_i} + \eta_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i} - \zeta_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)$$
$$+ \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial p} + q\frac{\partial W}{\partial r} - r\frac{\partial W}{\partial q} + \eta\frac{\partial W}{\partial \zeta} - \zeta\frac{\partial W}{\partial \eta},$$
$$M_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i\frac{\partial W}{\partial p_i} - p_i\frac{\partial W}{\partial r_i} + \zeta_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i} - \xi_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right)$$
$$+ \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q} + r\frac{\partial W}{\partial p} - p\frac{\partial W}{\partial r} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$
$$N_0' = \sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial r_i} + p_i\frac{\partial W}{\partial q_i} - q_i\frac{\partial W}{\partial p_i} + \xi_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i} - \eta_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)$$
$$+ \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial r} + p\frac{\partial W}{\partial q} - q\frac{\partial W}{\partial p} + \xi\frac{\partial W}{\partial \eta} - \eta\frac{\partial W}{\partial \xi};$$

nous aurons :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt$$
$$= \int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}(F_0'\delta' x + G_0'\delta' y + H_0'\delta' z + I_0'\delta\imath' + J_0'\delta\jmath' + K_0'\delta\kappa')d\sigma_0 dt$$
$$+ \left\{\iiint_{s_0}(A'\delta' x + B'\delta' y + C'\delta' z + P'\delta\imath' + Q'\delta\jmath' + R'\delta\kappa')dx_0 dy_0 dz_0\right\}_{t_1}^{t_2}$$
$$- \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}(X_0'\delta' x + Y_0'\delta' y + Z_0'\delta' z + L_0'\delta\imath' + M_0'\delta\jmath' + N_0'\delta\kappa')dx_0 dy_0 dz_0 dt.$$

En ayant d'abord égard à l'intégrale quadruple, qui figure dans l'expression de $\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt$, nous appellerons *force extérieure et moment extérieur au point M et à l'instant t, rapportés à l'unité de volume de la position du milieu à l'instant* t_0, les segments ayant leur origine en M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement X_0', Y_0', Z_0', et L_0', M_0', N_0'.

En ayant ensuite égard à l'intégrale triple prise par rapport au temps et étendue à la surface S_0, nous appellerons *effort extérieur et moment de déformation extérieur au point M de la surface S, qui limite le milieu déformé à l'instant t, rapportés à l'unité d'aire de la surface* S_0, les segments issus de ce point

M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$ et $-I_0'$, $-J_0'$, $-K_0'$. Ces six dernières quantités, en un point déterminé M de (S), ne dépendent que de la direction de la normale extérieure à la surface S ; elles restent invariables, si la région considérée de (M_0) variant, cette direction de la normale ne change pas, et elles changent de signe si cette direction est remplacée par la direction opposée.

Supposons qu'à l'intérieur du milieu déformé limité par la surface S, on trace une surface Σ, circonscrivant, soit seule, soit avec une portion de la surface S, une partie (A) du milieu, et désignons par (B) ce qui reste du milieu en dehors de la partie (A). Soit Σ_0 la surface de (M_0) qui correspond à la surface Σ de (M) et soient (A_0) et (B_0) les régions de (M_0) qui correspondent aux régions (A) et (B) de (M). Séparons par la pensée les deux parties (A) et (B) : on pourra regarder les deux segments $(-F_0', -G_0', -H_0')$ et $(-I_0', -J_0', -K_0')$, déterminés par le point M et pour la direction de la normale menée à Σ_0 vers l'extérieur de (A_0), comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M de la frontière Σ de la région (A) ; on pourra regarder de même les deux segments (F_0', G_0', H_0') et (I_0', J_0', K_0') comme l'effort et le moment de déformation extérieurs au point M de la frontière Σ de la région (B). En raison de cette remarque, nous dirons que $-F_0'$, $-G_0'$, $-H_0'$ et $-I_0'$, $-J_0'$, $-K_0'$ sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation exercés en M sur la portion (A) du milieu (M)*, et que F_0', G_0', H_0' et I_0', J_0', K_0' sont les composantes suivant les axes Mx', My', Mz' *de l'effort et du moment de déformation exercés en M sur la portion (B) du milieu (M)*.

Enfin, en ayant égard à l'intégrale triple étendue au volume de (M) à l'instant t, dont les valeurs sont prises aux instants extrêmes t_1 et t_2, nous appellerons *quantité de mouvement et moment de quantité de mouvement au point* M *du milieu déformé* (M) *à l'instant t*, les segments ayant leur origine en M et dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont respectivement A', B', C' et P', Q', R'.

63. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation, de la quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement — Posons, comme au § **53**,

$$A_i' = \frac{\partial W}{\partial \xi_i}, \qquad B_i' = \frac{\partial W}{\partial \eta_i}, \qquad C_i' = \frac{\partial W}{\partial \zeta_i},$$
$$P_i' = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \qquad Q_i' = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \qquad R_i' = \frac{\partial W}{\partial r_i};$$

A_i', B_i', C_i' et P_i', Q_i', R_i' représentent respectivement les projections sur Mx', My', Mz' de l'effort et du moment de déformation qui s'exercent au point M sur une surface qui, avant déformation, avait pour normale au point M_0 la parallèle à celui des axes coordonnés Ox, Oy, Oz qui correspond à l'indice i ; il suffit, en effet, de se rappeler qu'on a déjà convenu de remplacer par ρ_1, ρ_2, ρ_3, les lettres x_0, y_0, z_0, qui correspondent respectivement, d'après cette convention, aux indices 1, 2, 3. Cet effort et ce moment de déformation sont,

rappelons-le, rapportés à l'unité d'aire de la surface non déformée à l'instant t.

Les nouveaux efforts et les nouveaux moments de déformation que nous venons de définir sont liés aux éléments introduits dans le § précédent par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} F_0' &= l_0 A_1' + m_0 A_2' + n_0 A_3', & I_0' &= l_0 P_1' + m_0 P_2' + n_0 P_3' \\ G_0' &= l_0 B_1' + m_0 B_2' + n_0 B_3', & J_0' &= l_0 Q_1' + m_0 Q_2' + n_0 Q_3' \\ H_0' &= l_0 C_1' + m_0 C_2' + n_0 C_3', & K_0' &= l_0 R_1' + m_0 R_2' + n_0 R_3' \end{aligned}$$

$$\sum \left(\frac{\partial A_i'}{\partial \rho_i} + q_i C_i' - r_i B_i' \right) + \frac{dA'}{dt} + qC' - rB' - X_0' = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial B_i'}{\partial \rho_i} + r_i A_i' - p_i C_i' \right) + \frac{dB'}{dt} + rA' - pC' - Y_0' = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial C_i'}{\partial \rho_i} + p_i B_i' - q_i A_i' \right) + \frac{dC'}{dt} + pB' - qA' - Z_0' = 0$$

$$\sum \left(\frac{\partial P_i'}{\partial \rho_i} + q_i R_i' - r_i Q_i' + \eta_i C_i' - \zeta_i B_i' \right) + \frac{dP'}{dt} + qR' - rQ' + \eta_1 C' - \zeta B' - L_0' = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial Q_i'}{\partial \rho_i} + r_i P_i' - p_i R_i' + \zeta_i A_i' - \xi_i C_i' \right) + \frac{dQ'}{dt} + rP' - pR' + \zeta A' - \xi C' - M_0' = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial R_i'}{\partial \rho_i} + p_i Q_i' - q_i P_i' + \xi_i B_i' - \eta_i A_i' \right) + \frac{dR'}{dt} + pQ' - qP' + \xi B' - \eta_1 A' - N_0' = 0.$$

On peut se proposer de transformer les relations que nous venons d'écrire, indépendamment des valeurs calculées au moyen de W, des quantités qui y figurent. Ces relations ont lieu, en effet, entre des segments attachés au point M et auxquels nous avons attribué des noms ; au lieu de définir ces segments par leurs projections sur Mx', My', Mz', nous pouvons tout aussi bien les définir par leurs projections sur d'autres axes ; ces dernières projections seront liées par des relations, transformées des précédentes. Les relations transformées s'obtiendront d'ailleurs immédiatement, si l'on remarque que les formules primitives ont des interprétations simples (1) par l'adjonction aux axes mobiles des axes qui leur sont menés parallèlement par le point O.

1. Bornons-nous, comme pour la statique, à la considération des axes fixes Ox, Oy, Oz ; désignons respectivement par X_0, Y_0, Z_0 et par L_0, M_0, N_0 les projections sur ces axes de la force extérieure et du moment extérieur en un point quelconque M du milieu déformé à l'instant t, par F_0, G_0, H_0 et par I_0, J_0, K_0 les projections de l'effort et du moment de déformation sur une surface dont, avant déformation et à l'instant t, la normale extérieure a des cosinus directeurs l_0, m_0, n_0, par A_i, B_i, C_i, et par P_i, Q_i, R_i les projections de l'effort (A_i', B_i', C_i') et du moment de déformation (P_i', Q_i', R_i'), par A, B, C, et par P, Q, R les projections de la quantité de mouvement (A, B, C) et du moment de quantité

(1) Une interprétation intéressante à noter est l'analogue de celle donnée par P. Saint-Guilhem à propos de la dynamique du trièdre.

de mouvement (P, Q, R). Les transformées des relations précédentes sont évidemment :

$$F_0 = l_0A_1 + m_0A_2 + n_0A_3, \qquad I_0 = l_0P_1 + m_0P_2 + n_0P_3,$$
$$G_0 = l_0B_1 + m_0B_2 + n_0B_3, \qquad J_0 = l_0Q_1 + m_0Q_2 + n_0Q_3,$$
$$H_0 = l_0C_1 + m_0C_2 + n_0C_3, \qquad K_0 = l_0R_1 + m_0R_2 + n_0R_3,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_0} + \frac{\partial A_2}{\partial y_0} + \frac{\partial A_3}{\partial z_0} + \frac{dA}{dt} - X_0 = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_0} + \frac{\partial B_2}{\partial y_0} + \frac{\partial B_3}{\partial z_0} + \frac{dB}{dt} - Y_0 = 0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_0} + \frac{\partial C_2}{\partial y_0} + \frac{\partial C_3}{\partial z_0} + \frac{dC}{dt} - Z_0 = 0,$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x_0} + \frac{\partial P_2}{\partial y_0} + \frac{\partial P_3}{\partial z_0} + \frac{dP}{dt} + C_1\frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial y}{\partial z_0} + C\frac{dy}{dt}$$
$$- B_1\frac{\partial z}{\partial x_0} - B_2\frac{\partial z}{\partial y_0} - B_3\frac{\partial z}{\partial z_0} - B\frac{dz}{dt} - L_0 = 0,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x_0} + \frac{\partial Q_2}{\partial y_0} + \frac{\partial Q_3}{\partial z_0} + \frac{dQ}{dt} + A_1\frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial z}{\partial z_0} + A\frac{dz}{dt}$$
$$- C_1\frac{\partial x}{\partial x_0} - C_2\frac{\partial x}{\partial y_0} - C_3\frac{\partial x}{\partial z_0} - C\frac{dx}{dt} - M_0 = 0,$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_0} + \frac{\partial R_2}{\partial y_0} + \frac{\partial R_3}{\partial z_0} + \frac{dR}{dt} + B_1\frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial x}{\partial y_0} + B_3\frac{\partial x}{\partial z_0} + B\frac{dx}{dt}$$
$$- A_1\frac{\partial y}{\partial x_0} - A_2\frac{\partial y}{\partial y_0} - A_3\frac{\partial y}{\partial z_0} - A\frac{dy}{dt} - N_0 = 0.$$

2. Observons maintenant que nous pouvons exprimer les neuf cosinus $\alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ au moyen de trois auxiliaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Posons :

$$\Sigma\gamma d\beta = -\Sigma\beta d\gamma = \varpi_1' d\lambda_1 + \varpi_2' d\lambda_2 + \varpi_3' d\lambda_3,$$
$$\Sigma\alpha d\gamma = -\Sigma\gamma d\alpha = \chi_1' d\lambda_1 + \chi_2' d\lambda_2 + \chi_3' d\lambda_3,$$
$$\Sigma\beta d\alpha = -\Sigma\alpha d\beta = \sigma_1' d\lambda_1 + \sigma_2' d\lambda_2 + \sigma_3' d\lambda_3.$$

Les fonctions $\varpi_i, \chi_i, \sigma_i$ de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, ainsi définies satisfont aux relations, que nous avons déjà écrites plusieurs fois,

$$\frac{\partial \varpi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \varpi_i'}{\partial \lambda_j} + \chi_i'\sigma_j' - \chi_j'\sigma_i' = 0,$$
$$\frac{\partial \chi_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \chi_i'}{\partial \lambda_j} + \sigma_i'\varpi_j' - \sigma_j'\varpi_i' = 0, \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$
$$\frac{\partial \sigma_j'}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial \sigma_i'}{\partial \lambda_j} + \varpi_i'\chi_j' - \varpi_j'\chi_i' = 0,$$

et l'on a :

$$p_i = \varpi_1'\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \varpi_2'\frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \varpi_3'\frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}, \qquad p = \varpi_1'\frac{d\lambda_1}{dt} + \varpi_2'\frac{d\lambda_2}{dt} + \varpi_3'\frac{d\lambda_3}{dt},$$
$$q_i = \chi_1'\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \chi_2'\frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \chi_3'\frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}, \qquad q = \chi_1'\frac{d\lambda_1}{dt} + \chi_2'\frac{d\lambda_2}{dt} + \chi_3'\frac{d\lambda_3}{dt},$$
$$r_i = \sigma_1'\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i} + \sigma_2'\frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i} + \sigma_3'\frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}, \qquad r = \sigma_1'\frac{d\lambda_1}{dt} + \sigma_2'\frac{d\lambda_2}{dt} + \sigma_3'\frac{d\lambda_3}{dt},$$

où $x_0 = \rho_1$, $y_0 = \rho_2$, $z_0 = \rho_3$. Désignons par ϖ_i, χ_i, σ_i les projections, sur les axes fixes Ox, Oy, Oz, du segment dont les projections sur les axes Mx', My', Mz' sont ϖ_i', χ_i', σ_i', nous aurons :

$$\begin{aligned}
\Sigma\alpha' d\alpha'' &= -\Sigma\alpha'' d\alpha' = \varpi_1 d\lambda_1 + \varpi_2 d\lambda_2 + \varpi_3 d\lambda_3,\\
\Sigma\alpha'' d\alpha &= -\Sigma\alpha d\alpha'' = \chi_1 d\lambda_1 + \chi_2 d\lambda_2 + \chi_3 d\lambda_3,\\
\Sigma\alpha d\alpha' &= -\Sigma\alpha' d\alpha = \sigma_1 d\lambda_1 + \sigma_2 d\lambda_2 + \sigma_3 d\lambda_3,
\end{aligned}$$

en vertu desquelles (1) les nouvelles fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i, de λ_1, λ_2, λ_3, satisfont aux relations :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varpi_j}{\partial\lambda_i} - \frac{\partial\varpi_i}{\partial\lambda_j} &= \chi_i\sigma_j - \chi_j\sigma_i,\\
\frac{\partial\chi_j}{\partial\lambda_i} - \frac{\partial\chi_i}{\partial\lambda_j} &= \sigma_i\varpi_j - \sigma_j\varpi_i, \qquad (i,j = 1, 2, 3).\\
\frac{\partial\sigma_j}{\partial\lambda_i} - \frac{\partial\sigma_i}{\partial\lambda_j} &= \varpi_i\chi_j - \varpi_j\chi_i;
\end{aligned}$$

nous ferons encore la remarque, qui nous servira plus loin, que si l'on désigne par $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, $\delta\lambda_3$ les variations de λ_1, λ_2, λ_3 qui correspondent aux variations $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$, ... $\delta\gamma''$ de α, α', ... γ'', on aura :

$$\begin{aligned}
\delta\mathrm{I}' &= \varpi_1'\delta\lambda_1 + \varpi_2'\delta\lambda_2 + \varpi_3'\delta\lambda_3\\
\delta\mathrm{J}' &= \chi_1'\delta\lambda_1 + \chi_2'\delta\lambda_2 + \chi_3'\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{K}' &= \sigma_1'\delta\lambda_1 + \sigma_2'\delta\lambda_2 + \sigma_3'\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{I} &= \alpha\delta\mathrm{I}' + \beta\delta\mathrm{J}' + \gamma\delta\mathrm{K}' = \varpi_1\delta\lambda_1 + \varpi_2\delta\lambda_2 + \varpi_3\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{J} &= \alpha'\delta\mathrm{I}' + \beta'\delta\mathrm{J}' + \gamma'\delta\mathrm{K}' = \chi_1\delta\lambda_1 + \chi_2\delta\lambda_2 + \chi_3\delta\lambda_3,\\
\delta\mathrm{K} &= \alpha''\delta\mathrm{I}' + \beta''\delta\mathrm{J}' + \gamma''\delta\mathrm{K}' = \sigma_1\delta\lambda_1 + \sigma_2\delta\lambda_2 + \sigma_3\delta\lambda_3,
\end{aligned}$$

où $\delta\mathrm{I}$, $\delta\mathrm{J}$, $\delta\mathrm{K}$ sont les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz', sont $\delta\mathrm{I}'$, $\delta\mathrm{J}'$, $\delta\mathrm{K}'$. Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_0 &= \varpi_1'\mathrm{I}_0' + \chi_1'\mathrm{J}_0' + \sigma_1'\mathrm{K}_0' = \varpi_1\mathrm{I}_0 + \chi_1\mathrm{J}_0 + \sigma_1\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{J}_0 &= \varpi_2'\mathrm{I}_0' + \chi_2'\mathrm{J}_0' + \sigma_2\mathrm{K}'_0{}' = \varpi_2\mathrm{I}_0 + \chi_2\mathrm{J}_0 + \sigma_2\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{K}_0 &= \varpi_3'\mathrm{J}_0' + \chi_3'\mathrm{J}_0' + \sigma_3'\mathrm{K}_0' = \varpi_3\mathrm{I}_0 + \chi_3\mathrm{J}_0 + \sigma_3\mathrm{K}_0,\\
\mathfrak{L}_0 &= \varpi_1'\mathrm{L}_0' + \chi_1'\mathrm{M}_0' + \sigma_1'\mathrm{N}_0' = \varpi_1\mathrm{L}_0 + \chi_1\mathrm{M}_0 + \sigma_1\mathrm{N}_0,\\
\mathfrak{M}_0 &= \varpi_2'\mathrm{L}_0' + \chi_2\mathrm{M}'_0{}' + \sigma_2'\mathrm{N}_0' = \varpi_2\mathrm{L}_0 + \chi_2\mathrm{M}_0 + \sigma_2\mathrm{N}_0,\\
\mathfrak{N}_0 &= \varpi_3'\mathrm{L}_0' + \chi_3'\mathrm{M}_0' + \sigma_3'\mathrm{N}_0' = \varpi_3\mathrm{L}_0 + \chi_3\mathrm{M}_0 + \sigma_3\mathrm{N}_0.
\end{aligned}$$

Introduisons en outre les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= \varpi_1'\mathrm{P}_i' + \chi_1'\mathrm{Q}_i' + \sigma_1'\mathrm{R}_i' = \varpi_1\mathrm{P}_i + \chi_1\mathrm{Q}_i + \sigma_1\mathrm{R}_i,\\
\mathrm{X}_i &= \varpi_2'\mathrm{P}_i' + \chi_2'\mathrm{Q}_i' + \sigma_2'\mathrm{R}_i' = \varpi_2\mathrm{P}_i + \chi_2\mathrm{Q}_i + \sigma_2\mathrm{R}_i,\\
\Sigma_i &= \varpi_3'\mathrm{P}_i' + \chi_3'\mathrm{Q}_i' + \sigma_3'\mathrm{R}_i' = \varpi_3\mathrm{P}_i + \chi_3\mathrm{Q}_i + \sigma_3\mathrm{R}_i,\\
\Pi &= \varpi_1'\mathrm{P}' + \chi_1'\mathrm{Q}' + \sigma_1'\mathrm{R}' = \varpi_1\mathrm{P} + \chi_1\mathrm{Q} + \sigma_1\mathrm{R},\\
\mathrm{X} &= \varpi_2'\mathrm{P}' + \chi_2'\mathrm{Q}' + \sigma_2'\mathrm{R}' = \varpi_2\mathrm{P} + \chi_2\mathrm{Q} + \sigma_2\mathrm{R},\\
\Sigma &= \varpi_3'\mathrm{P}' + \chi_3'\mathrm{Q}' + \sigma_3'\mathrm{R}' = \varpi_3\mathrm{P} + \chi_3\mathrm{Q} + \sigma_3\mathrm{R},
\end{aligned}$$

(1) Ces formules peuvent servir de définition directe aux fonctions ϖ_i, χ_i, σ_i et être substituées à

$$\begin{aligned}
\varpi_i &= \alpha\varpi_i' + \beta\chi_i' + \gamma\sigma_i',\\
\chi_i &= \alpha'\varpi_i' + \beta'\chi_i' + \gamma'\sigma_i', \qquad (i = 1,2,3).\\
\sigma_i &= \alpha''\varpi_i' + \beta''\chi_i' + \gamma''\sigma_i'.
\end{aligned}$$

nous avons, à la place du dernier système où figurent soit P_i', Q_i', R_i', P', Q', R', soit P_i, Q_i, R_i, P, Q, R, le suivant :

$$-\mathfrak{L}_0+\sum_i\Big[\frac{\partial\Pi_i}{\partial\rho_i}-P_i'\Big(\frac{\partial\varpi_1'}{\partial\rho_i}+q_i\sigma_1'-r_i\chi_1'\Big)-Q_i'\Big(\frac{\partial\chi_1'}{\partial\rho_i}+r_i\varpi_1'-p_i\sigma_1'\Big)-R_i'\Big(\frac{\partial\sigma_1'}{\partial\rho_i}+p_i\chi_1'-q_i\varpi_1'\Big)$$
$$+A_i'(\chi_1'\zeta_i-\sigma_1'\eta_i)+B_i'(\sigma_1'\xi_i-\varpi_1'\zeta_i)+C_i'(\varpi_1'\eta_i-\chi_1'\xi_i)\Big]$$
$$+\frac{d\Pi}{dt}-P'\Big(\frac{d\varpi_1'}{dt}+q\sigma_1'-r\chi_1'\Big)-Q'\Big(\frac{d\chi_1'}{dt}+r\varpi_1'-p\sigma_1'\Big)-R'\Big(\frac{d\sigma_1'}{dt}+p\chi_1'-q\varpi_1'\Big)$$
$$+A'(\chi_1'\zeta-\sigma_1'\eta)+B'(\sigma_1'\xi-\varpi_1'\zeta)+C'(\varpi_1'\eta-\chi_1'\xi)=0,$$

avec deux équations analogues. Si l'on remarque que les fonctions ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i et ξ, η, ζ, p, q, r de λ_1, λ_2, λ_3, $\frac{\partial\lambda_1}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_2}{\partial\rho_i}$, $\frac{\partial\lambda_3}{\partial\rho_i}$, $\frac{d\lambda_1}{dt}$, $\frac{d\lambda_2}{dt}$, $\frac{d\lambda_3}{dt}$ donnent lieu aux formules :

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial\lambda_j}+\chi_j'\zeta_i-\sigma_j'\eta_i=0,\qquad \frac{\partial p_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\varpi_j'}{\partial\rho_i}+q_i\sigma_j'-r_i\chi_j',$$
$$\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda_j}+\sigma_j'\xi_i-\varpi_j'\zeta_i=0,\qquad \frac{\partial q_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\chi_j'}{\partial\rho_i}+r_i\varpi_j'-p_i\sigma_j',$$
$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial\lambda_j}+\varpi_j'\eta_i-\chi_j'\xi_i=0,\qquad \frac{\partial r_i}{\partial\lambda_j}=\frac{\partial\sigma_j'}{\partial\rho_i}+p_i\chi_j'-q_i\varpi_j',$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial\lambda_j}+\chi_j'\zeta-\sigma_j'\eta=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial\lambda_j}=\frac{d\varpi_j'}{dt}+q\sigma_j'-r\chi_j',$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial\lambda_j}+\sigma_j'\xi-\varpi_j'\zeta=0,\qquad \frac{\partial q}{\partial\lambda_j}=\frac{d\chi_j'}{dt}+r\varpi_j'-p\sigma_j',$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_j}+\varpi_j'\eta-\chi_i'\xi=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial\lambda_j}=\frac{d\sigma_j'}{dt}+p\chi_j'-q\varpi_j',$$

qui résultent des relations de définition des fonctions ϖ_i', χ_i', σ_i' et des neuf identités qu'elles vérifient, on peut donner au système précédent la nouvelle forme :

$$-\mathfrak{L}_0+\sum_i\Big[\frac{\partial\Pi_i}{\partial\rho_i}-A_i'\frac{\partial\xi_i}{\partial\lambda_1}-B_i'\frac{\partial\eta_i}{\partial\lambda_1}-C_i'\frac{\partial\zeta_i}{\partial\lambda_1}-P_i'\frac{\partial p_i}{\partial\lambda_1}-Q_i'\frac{\partial q_i}{\partial\lambda_1}-R_i'\frac{\partial r_i}{\partial\lambda_1}\Big]$$
$$+\frac{d\Pi}{dt}-A'\frac{\partial\xi}{\partial\lambda_1}-B'\frac{\partial\eta}{\partial\lambda_1}-C'\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda_1}-P'\frac{\partial p}{\partial\lambda_1}-Q'\frac{\partial q}{\partial\lambda_1}-R'\frac{\partial r}{\partial\lambda_1}=0,$$

avec deux équations analogues.

3. Nous allons enfin faire subir aux équations que nous avons introduites précédemment une transformation analogue à celle qui nous a conduit au § 53 à la généralisation des équations de la théorie de l'élasticité qui sont relatives à l'effort.

Pour abréger l'écriture, désignons pour un instant par $\mathfrak{X}_0'$, $\mathfrak{Y}_0'$, $\mathfrak{Z}_0'$, $\mathfrak{L}_0'$, $\mathfrak{M}_0'$, $\mathfrak{N}_0'$ les premiers membres des relations à transformer, qui renferment respec-

tivement X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0, et observons qu'on peut résumer les douze relations que nous avons établies dans la suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\mathfrak{X}_0'\lambda_1+\mathfrak{Y}_0'\lambda_2+\mathfrak{Z}_0'\lambda_3+\mathfrak{L}_0'\mu_1+\mathfrak{M}_0'\mu_2+\mathfrak{N}_0'\mu_3)\,dx_0dy_0dz_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}\{(F_0-l_0A_1-m_0A_2-n_0A_3)\lambda_1+(G_0-l_0B_1-m_0B_2-n_0B_3)\lambda_2$$
$$+(H_0-l_0C_1-m_0C_2-n_0C_3)\lambda_3+(I_0-l_0P_1-m_0P_2-n_0P_3)\mu_1$$
$$+(J_0-l_0Q_1-m_0Q_2-n_0Q_3)\mu_2+(K_0-l_0R_1-m_0R_2-n_0R_3)\mu_3\}\,d\sigma_0dt=0,$$

où λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 sont des fonctions arbitraires et où les intégrales sont étendues d'une part à l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2, et sont relatives d'autre part à la surface S_0 du milieu (M_0) et au domaine limité par elle. Appliquant la formule de Green et le procédé d'intégration par parties, la relation que nous venons d'écrire devient la suivante :

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}(X_0\lambda_1+Y_0\lambda_2+Z_0\lambda_3+L_0\mu_1+M_0\mu_2+N_0\mu_3)\,dx_0dy_0dz_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}(F_0\lambda_1+G_0\lambda_2+H_0\lambda_3+I_0\mu_1+J_0\mu_2+K_0\mu_3)\,d\sigma_0dt$$
$$+\left\{\iiint_{s_0}(A\lambda_1+B\lambda_2+C\lambda_3+P\mu_1+Q\mu_2+R\mu_3)\,dx_0dy_0dz_0\right\}_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\left(A_1\frac{\partial\lambda_1}{\partial x_0}+A_2\frac{\partial\lambda_1}{\partial y_0}+A_3\frac{\partial\lambda_1}{\partial z_0}+A\frac{d\lambda_1}{dt}+B_1\frac{\partial\lambda_2}{\partial x_0}+B_2\frac{\partial\lambda_2}{\partial y_0}+B_3\frac{\partial\lambda_2}{\partial z_0}+B\frac{d\lambda_2}{dt}\right.$$
$$\left.+C_1\frac{\partial\lambda_3}{\partial x_0}+C_2\frac{\partial\lambda_3}{\partial y_0}+C_3\frac{\partial\lambda_3}{\partial z_0}+C\frac{d\lambda_3}{dt}\right)dx_0dy_0dz_0dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\left(P_1\frac{\partial\mu_1}{\partial x_0}+P_2\frac{\partial\mu_1}{\partial y_0}+P_3\frac{\partial\mu_1}{\partial z_0}+P\frac{d\mu_1}{dt}+Q_1\frac{\partial\mu_2}{\partial x_0}+Q_2\frac{\partial\mu_2}{\partial y_0}+Q_3\frac{\partial\mu_2}{\partial z_0}+Q\frac{d\mu_2}{dt}\right.$$
$$\left.+R_1\frac{\partial\mu_3}{\partial x_0}+R_2\frac{\partial\mu_3}{\partial y_0}+R_3\frac{\partial\mu_3}{\partial z_0}+R\frac{d\mu_3}{dt}\right)dx_0dy_0dz_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\left(C_1\frac{\partial\gamma}{\partial x_0}+C_2\frac{\partial\gamma}{\partial y_0}+C_3\frac{\partial\gamma}{\partial z_0}+C\frac{dy}{dt}\right.$$
$$\left.-B_1\frac{\partial z}{\partial x_0}-B_2\frac{\partial z}{\partial y_0}-B_3\frac{\partial z}{\partial z_0}-B\frac{dz}{dt}\right)\mu_1dx_0dy_0dz_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\left(A_1\frac{\partial z}{\partial x_0}+A_2\frac{\partial z}{\partial y_0}+A_3\frac{\partial z}{\partial z_0}+A\frac{dz}{dt}\right.$$
$$\left.-C_1\frac{\partial x}{\partial x_0}-C_2\frac{\partial x}{\partial y_0}-C_3\frac{\partial x}{\partial z_0}-C\frac{dx}{dt}\right)\mu_2dx_0dy_0dz_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\left(B_1\frac{\partial x}{\partial x_0}+B_2\frac{\partial x}{\partial y_0}+B_3\frac{\partial x}{\partial z_0}+B\frac{dx}{dt}\right.$$
$$\left.-A_1\frac{\partial y}{\partial x_0}-A_2\frac{\partial y}{\partial y_0}-A_3\frac{\partial y}{\partial z_0}-A\frac{dy}{dt}\right)\mu_3dx_0dy_0dz_0dt=0.$$

Cherchons la transformée de cette dernière relation, lorsqu'on prend, en conservant t, pour autres nouvelles variables, les fonctions x, y, z. Appliquons les formules élémentaires du changement de variables rappelées au § **53** aux fonctions λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 ; S indiquant toujours la surface du milieu (M) à l'instant t, qui correspond à la surface S_0 de (M_0), désignons de plus par X, Y, Z, L, M, N les projections sur Ox, Oy, Oz de la force extérieure et du moment extérieur appliqués au point M à l'instant t et rapportés à l'unité de volume du milieu déformé (M), et par F, G, H, I, J, K les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort et du moment de déformation, qui s'exercent au point M sur S, rapportés à l'unité d'aire de S. Introduisons enfin, comme au § **53**, dix-huit nouvelles auxiliaires p_{xx}, ..., q_{xx}, ..., par les formules :

$$\Delta p_{xx} = A_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial x}{\partial z_0}, \qquad \Delta q_{xx} = P_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial x}{\partial z_0},$$

$$\Delta p_{yx} = A_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial y}{\partial z_0}, \qquad \Delta q_{yx} = P_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial y}{\partial z_0},$$

$$\Delta p_{zx} = A_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial z}{\partial z_0}, \qquad \Delta q_{zx} = P_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + P_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + P_3 \frac{\partial z}{\partial z_0},$$

et par les analogues obtenues en remplaçant :

$$A_1, A_2, A_3, p_{xx}, p_{yx}, p_{zx}, P_1, P_2, P_3, q_{xx}, q_{yx}, q_{zx},$$

respectivement par

$$B_1, B_2, B_3, p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}, Q_1, Q_2, Q_3, q_{xy}, q_{yy}, q_{zy},$$

puis par

$$C_1, C_2, C_3, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}, R_1, R_2, R_3, q_{xz}, q_{yz}, q_{zz},$$

la quantité Δ ayant même expression qu'au § **53**. Nous obtenons la relation transformée :

$$-\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S (X\lambda_1 + Y\lambda_2 + Z\lambda_3 + L\mu_1 + M\mu_2 + N\mu_3)\, dxdydzdt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S (F\lambda_1 + G\lambda_2 + H\lambda_3 + I\mu_1 + J\mu_2 + K\mu_3)\, d\sigma dt$$

$$+\left\{\iiint_S \left(\frac{A}{\Delta}\lambda_1 + \frac{B}{\Delta}\lambda_2 + \frac{C}{\Delta}\lambda_3 + \frac{P}{\Delta}\mu_1 + \frac{Q}{\Delta}\mu_2 + \frac{R}{\Delta}\mu_3\right) dxdydz\right\}_{t_1}^{t_2}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \left(p_{xx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial y} + p_{zx}\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} + p_{xy}\frac{\partial\lambda_2}{\partial x} + \ldots + p_{zz}\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}\right.$$
$$\left. + \frac{A}{\Delta}\frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{B}{\Delta}\frac{d\lambda_2}{dt} + \frac{C}{\Delta}\frac{d\lambda_3}{dt}\right) dxdydzdt$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \left(q_{xx}\frac{\partial\mu_1}{\partial x} + q_{yx}\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + q_{zx}\frac{\partial\mu_1}{\partial z} + q_{xy}\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + \ldots + q_{zz}\frac{\partial\mu_3}{\partial z}\right.$$
$$\left. + \frac{P}{\Delta}\frac{d\mu_1}{dt} + \frac{Q}{\Delta}\frac{d\mu_2}{dt} + \frac{R}{\Delta}\frac{d\mu_3}{dt}\right) dxdydzdt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \left\{\left(p_{yz} - p_{zy} + \frac{C}{\Delta}\frac{dy}{dt} - \frac{B}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right)\mu_1 + \left(p_{zx} - p_{xz} + \frac{A}{\Delta}\frac{dz}{dt} - \frac{C}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right)\mu_2\right.$$
$$\left. + \left(p_{xy} - p_{yx} + \frac{B}{\Delta}\frac{dx}{dt} - \frac{A}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right)\mu_3\right\} dxdydzdt = 0,$$

où les intégrales sont relatives d'une part à l'intervalle de temps entre les instants t_1 et t_2, et d'autre part à la surface S du milieu (M) à l'instant t et au domaine limité par elle, $d\sigma$ désignant l'élément d'aire de S.

Appliquons de nouveau la formule de GREEN aux termes qui renferment les dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, μ_1 μ_2, μ_3 par rapport à x, y, z, et une intégration par parties aux termes qui renferment les dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 par rapport (1) à t, et désignons par l, m, n les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes, de la normale extérieure à la surface S à l'instant t; il vient, puisque λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 sont arbitraires :

$$\mathrm{F} = lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx}, \qquad \mathrm{I} = lq_{xx} + mq_{yx} + nq_{zx},$$
$$\mathrm{G} = lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy}, \qquad \mathrm{J} = lq_{xy} + mq_{yy} + nq_{zy},$$
$$\mathrm{H} = lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz}, \qquad \mathrm{K} = lq_{xz} + mq_{yz} + nq_{zz},$$

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{A}}{dt} - \mathrm{X} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{B}}{dt} - \mathrm{Y} = 0,$$

$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{C}}{dt} - \mathrm{Z} = 0,$$

$$\frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z} + p_{yz} - p_{zy} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{P}}{dt} + \frac{\mathrm{C}}{\Delta}\frac{dy}{dt} - \frac{\mathrm{B}}{\Delta}\frac{dz}{dt} - \mathrm{L} = 0,$$

$$\frac{\partial q_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zy}}{\partial z} + p_{zx} - p_{xz} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{Q}}{dt} + \frac{\mathrm{A}}{\Delta}\frac{dz}{dt} - \frac{\mathrm{C}}{\Delta}\frac{dx}{dt} - \mathrm{M} = 0,$$

$$\frac{\partial q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zz}}{\partial z} + p_{xy} - p_{yx} + \frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{R}}{dt} + \frac{\mathrm{B}}{\Delta}\frac{dx}{dt} - \frac{\mathrm{A}}{\Delta}\frac{dy}{dt} - \mathrm{N} = 0.$$

La signification des dix-huit nouvelles auxiliaires p_{xx}, ..., q_{xx}, ... résulte immédiatement des relations que nous venons de trouver. Il est clair, en effet, que les coefficients p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} de l dans les expressions de F, G, H représentent les projections sur Ox, Oy, Oz de l'effort qui s'exerce au point M sur une surface dont la normale intérieure est parallèle à Ox, et que les coefficients q_{xx}, q_{xy}, q_{xz} de l dans les expressions de I, J, K sont les projections sur Ox, Oy, Oz du moment de déformation en M relatif à la même surface.

64. Travail virtuel extérieur; théorème analogue à ceux de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents. — Nous donnerons le nom de *travail virtuel extérieur* sur le milieu déformé (M) entre les instants t_1 et t_2, dans une déformation virtuelle quelconque, à l'expression :

$$\delta\mathfrak{T}_e = -\left\{\iiint_{S_0}(\mathrm{A}'\delta'x + \mathrm{B}'\delta'y + \mathrm{C}'\delta'z + \mathrm{P}'\delta_{\mathrm{I}}' + \mathrm{Q}'\delta_{\mathrm{J}}' + \mathrm{R}'\delta_{\mathrm{K}}')dx_0dy_0dz_0\right\}_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_0}(\mathrm{F}_0'\delta'x + \mathrm{G}_0'\delta'y + \mathrm{H}_0'\delta'z + \mathrm{I}_0'\delta_{\mathrm{I}}' + \mathrm{J}_0'\delta_{\mathrm{J}}' + \mathrm{K}_0'\delta_{\mathrm{K}}')d\sigma_0dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0}(\mathrm{X}_0'\delta'x + \mathrm{Y}_0'\delta'y + \mathrm{Z}_0'\delta'z + \mathrm{L}_0'\delta_{\mathrm{I}}' + \mathrm{M}_0'\delta_{\mathrm{J}}' + \mathrm{N}_0'\delta_{\mathrm{K}}')dx_0dy_0dz_0dt.$$

(1) Comme le champ d'intégration varie actuellement avec t, nous effectuons cette intégration par parties en passant par l'intermédiaire des variables x_0, y_0, z_0; nous supposons que Δ est positif et égal à $|\Delta|$.

Reportons-nous aux notations du § **60**, et désignons de plus par δ_I, δ_J, δ_K les projections sur les axes fixes du segment dont les projections sur Mx', My', Mz' sont $\delta_{I'}$, $\delta_{J'}$, $\delta_{K'}$, en sorte que l'on a, par exemple :

$$-\delta_I = \alpha''\delta\alpha' + \beta''\delta\beta' + \gamma''\delta\gamma' = -(\alpha'\delta\alpha'' + \beta'\delta\beta'' + \gamma'\delta\gamma''),$$

en supposant toujours les axes que l'on considère de même disposition.

Cela étant, supposons au § **63**, 3 que l'on attribue aux arbitraires λ_1, λ_2, λ_3, μ_1, μ_2, μ_3 la signification définie par les formules :

$$\lambda_1 = \delta x,\ \lambda_2 = \delta y,\ \lambda_3 = \delta z,\ \mu_1 = \delta_I,\ \mu_2 = \delta_J,\ \mu_3 = \delta_K.$$

Nous voyons alors que les relations obtenues précédemment entre les nouvelles auxiliaires introduites ne font qu'exprimer la condition suivante :

Quels que soient les déplacements virtuels du § **60** *imprimés à la trajectoire du milieu déformé, le travail virtuel extérieur* $\delta\mathcal{T}_e$ *est donné, soit par la relation :*

$$\begin{aligned}
-\delta\mathcal{T}_e = &\int_{t_1}^{t_2}\iiint_S \Big(p_{xx}\frac{\partial\delta x}{\partial x} + p_{yx}\frac{\partial\delta x}{\partial y} + p_{zx}\frac{\partial\delta x}{\partial z} + p_{xy}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \ldots + p_{zz}\frac{\partial\delta z}{\partial z}\\
&\qquad + \frac{A}{\Delta}\frac{d\delta x}{dt} + \frac{B}{\Delta}\frac{d\delta y}{dt} + \frac{C}{\Delta}\frac{d\delta z}{dt}\Big)\,dxdydzdt\\
+&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_S \Big(q_{xx}\frac{\partial\delta_I}{\partial x} + q_{yx}\frac{\partial\delta_I}{\partial y} + q_{zx}\frac{\partial\delta_I}{\partial z} + q_{xy}\frac{\partial\delta_J}{\partial x} + \ldots + q_{zz}\frac{\partial\delta_K}{\partial z}\\
&\qquad + \frac{P}{\Delta}\frac{d\delta_I}{dt} + \frac{Q}{\Delta}\frac{d\delta_J}{dt} + \frac{R}{\Delta}\frac{d\delta_K}{dt}\Big)\,dxdydzdt\\
-&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_S \Big\{\Big(p_{yz} - p_{zy} + \frac{C}{\Delta}\frac{dy}{dt} - \frac{B}{\Delta}\frac{dz}{dt}\Big)\delta_I + \Big(p_{zx} - p_{xz} + \frac{A}{\Delta}\frac{dz}{dt} - \frac{C}{\Delta}\frac{dx}{dt}\Big)\delta_J\\
&\qquad + \Big(p_{xy} - p_{yx} + \frac{B}{\Delta}\frac{dx}{dt} - \frac{A}{\Delta}\frac{dy}{dt}\Big)\delta_K\Big\}\,dxdydzdt,
\end{aligned}$$

où les intégrales sont étendues à l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 *et* t_2 *et au milieu déformé, soit par la relation :*

$$\begin{aligned}
-\delta\mathcal{T}_e = &\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0} \Big(A_1\frac{\partial\delta x}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial\delta x}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial\delta x}{\partial z_0} + B_1\frac{\partial\delta y}{\partial x_0} + \ldots + C_3\frac{\partial\delta z}{\partial z_0}\\
&\qquad + A\frac{d\delta x}{dt} + B\frac{d\delta y}{dt} + C\frac{d\delta z}{dt}\Big)\,dx_0dy_0dz_0dt\\
+&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0} \Big(P_1\frac{\partial\delta_I}{\partial x_0} + P_2\frac{\partial\delta_I}{\partial y_0} + P_3\frac{\partial\delta_I}{\partial z_0} + Q_1\frac{\partial\delta_J}{\partial x_0} + \ldots + R_3\frac{\partial\delta_K}{\partial z_0}\\
&\qquad + P\frac{d\delta_I}{dt} + Q\frac{d\delta_J}{dt} + R\frac{d\delta_K}{dt}\Big)dx_0dy_0dz_0dt\\
-&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0} \Big(C_1\frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2\frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3\frac{\partial y}{\partial z_0} + C\frac{dy}{dt}\\
&\qquad - B_1\frac{\partial z}{\partial x_0} - B_2\frac{\partial z}{\partial y_0} - B_3\frac{\partial z}{\partial z_0} - B\frac{dz}{dt}\Big)\,\delta_I dx_0dy_0dz_0dt\\
-&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0} \Big(A_1\frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2\frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3\frac{\partial z}{\partial z_0} + A\frac{dz}{dt}\\
&\qquad - C_1\frac{\partial x}{\partial x_0} - C_2\frac{\partial x}{\partial y_0} - C_3\frac{\partial x}{\partial z_0} - C\frac{dx}{dt}\Big)\,\delta_J dx_0dy_0dz_0dt\\
-&\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{S_0} \Big(B_1\frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2\frac{\partial x}{\partial y_0} + B_3\frac{\partial x}{\partial z_0} + B\frac{dx}{dt}\\
&\qquad - A_1\frac{\partial y}{\partial x_0} - A_2\frac{\partial y}{\partial y_0} - A_3\frac{\partial y}{\partial z_0} - A\frac{dy}{dt}\Big)\,\delta_K dx_0dy_0dz_0dt
\end{aligned}$$

où les intégrales sont étendues à l'intervalle de temps entre les instants t_1 et t_2 et au milieu non déformé à l'instant t, car la formule :

$$\delta\mathcal{C}_e = -\Big\{\iiint_{s_0}(A'\delta'x + B'\delta'y + C'\delta'z + P'\delta_I' + Q'\delta_J' + R'\delta_K')dx_0dy_0dz_0\Big\}_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}(F_0'\delta'x + G_0'\delta'y + H_0'\delta'z + I_0'\delta_I' + J_0'\delta_J' + K_0'\delta_K')d\sigma_0 dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}(X_0'\delta'x+Y_0'\delta'y+Z_0'\delta'z+L_0'\delta_I'+M_0'\delta_J'+N_0'\delta_K')dx_0dy_0dz_0dt,$$

donnée plus haut, pour servir de définition au travail virtuel extérieur, peut aussi s'écrire :

$$\delta\mathcal{C}_e = -\Big\{\iiint_{s_0}(A\delta x + B\delta y + C\delta z + P\delta_I + Q\delta_J + R\delta_K)\,dx_0dy_0dz_0\Big\}_{t_1}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}(F_0\delta x + G_0\delta y + H_0\delta z + I_0\delta_I + J_0\delta_J + K_0\delta_K)\,d\sigma_0 dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}(X_0\delta x+Y_0\delta y+Z_0\delta z+L_0\delta_I+M_0\delta_J+N_0\delta_K)dx_0dy_0dz_0dt,$$

en vertu de la signification de X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0, F_0, G_0, H_0, I_0, J_0, K_0, A, B, C, P, Q, R, et également

$$\delta\mathcal{C}_e = -\Big\{\iiint_{s}\Big(\frac{A}{\Delta}\delta x + \frac{B}{\Delta}\delta y + \frac{C}{\Delta}\delta z + \frac{P}{\Delta}\delta_I + \frac{Q}{\Delta}\delta_J + \frac{R}{\Delta}\delta_K\Big)dxdydz\Big\}_{t}^{t_2}$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s}(F\delta x + G\delta y + H\delta z + I\delta_I + J\delta_J + K\delta_K)d\sigma dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s}(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z + L\delta_I + M\delta_J + N\delta_K)dxdydzdt,$$

en vertu de la signification de X, Y, .., N, F, G, ..., K.

Partons de la formule

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\delta W dx_0dy_0dz_0dt + \delta\mathcal{C}_e = 0,$$

appliquée à une portion quelconque du milieu limitée par une surface S_0 et à l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2. Comme δW doit être identiquement nul, en vertu de l'invariance de W dans le groupe des déplacements euclidiens, quand les variations δx, δy, δz sont données par les formules (60) du § **61**, savoir :

$$\delta x = (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\delta t,$$
$$\delta y = (a_2 + \omega_3 x - \omega_1 z)\delta t,$$
$$\delta z = (a_3 + \omega_1 y - \omega_2 x)\delta t,$$

et δ_I, δ_J, δ_K par

$$\delta_I = \omega_1 \delta t, \qquad \delta_J = \omega_2 \delta t, \qquad \delta_K = \omega_3 \delta t,$$

et cela, quelles que soient les valeurs des constantes a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3, nous en concluons, d'après les expressions de $\delta \mathcal{C}_\varepsilon$, sur lesquelles (1) nous venons d'insister, que l'on a :

$$\left\{ \iiint_{S_0} A dx_0 dy_0 dz_0 \right\}_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_0} F_0 d\sigma_0 dt - \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{S_0} X_0 dx_0 dy_0 dz_0 dt = 0,$$

$$\left\{ \iiint_{S_0} (P + Cy - Bz) dx_0 dy_0 dz_0 \right\}_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \iint_{S_0} (I_0 + H_0 y - G_0 z) d\sigma_0 dt$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{S_0} (L_0 + Z_0 y - Y_0 z) dx_0 dy_0 dz_0 dt = 0,$$

et quatre équations analogues. *On peut concevoir, dans ces formules, que la frontière S_0 est variable.*

Les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents ne sont pas les seules que l'on pourrait envisager ; en nous bornant à leur considération, nous ajouterons les mêmes remarques simples qu'au § **54**.

Nous avons en définitive introduit deux systèmes d'efforts et de moments de déformation relatifs à un point M du milieu déformé à l'instant t ; les premiers sont ceux qui s'exercent sur des surfaces qui, avant déformation, ont leur normale parallèle à l'un des axes fixes Ox, Oy, Oz ; les seconds sont ceux qui s'exercent sur des surfaces qui ont leur normale parallèle à l'un des mêmes axes fixes Ox, Oy, Oz. Les formules que nous avons indiquées donnent les derniers éléments au moyen des premiers ; mais, par une résolution immédiate sur laquelle nous ne nous arrêterons pas, on obtient inversement les premiers éléments au moyen des seconds.

Supposons maintenant que l'on introduise la fonction W ; les premiers efforts et moments de déformation ont des expressions déjà indiquées, et on en déduit immédiatement les expressions relatives aux seconds. Mais, dans ces calculs, on peut expliciter les fonctions que l'on veut mettre en évidence suivant la nature du problème, et qui seront, *par exemple*, x, y, z et trois paramètres (2) λ_1, λ_2, λ_3, au moyen desquels on exprime α, α', ... γ''.

Si l'on introduit x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3 et si l'on continue de désigner par W la fonction portant sur x_0, y_0, z_0, sur les dérivées premières de x, y, z par rapport à x_0, y_0, z_0, t, sur λ_1, λ_2, λ_3 et sur leurs dérivées premières par rapport à x_0, y_0, z_0, t, obtenue en remplaçant dans la fonction W (x_0, y_0, z_0, t,

(1) Le passage des éléments, rapportés aux unités de volume du milieu non déformé et d'aire de la frontière S_0, aux mêmes éléments rapportés aux unités de volume du milieu déformé et d'aire de la frontière S à l'instant t, est tellement immédiat qu'il suffit de se borner, comme nous le faisons, aux premiers, par exemple.

(2) Comme telles auxiliaires λ_1, λ_2, λ_3, on peut prendre, par exemple, les composantes de la rotation, qui amène les axes Ox, Oy, Oz à être parallèles respectivement à Mx', My', Mz'.

$\xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i, \xi, \eta, \zeta, p, q, r$) les différentes quantités $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i, \xi, \eta, \zeta, p, q, r$ par leurs valeurs données par les formules (54), (55) et (54′), (55′), on aura :

$$A_1 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial x_0}}, \quad A_2 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial y_0}}, \quad A_3 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial z_0}}, \quad A = \frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{dt}},$$

$$B_1 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_0}}, \quad B_2 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial y_0}}, \quad B_3 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial z_0}}, \quad B = \frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{dt}},$$

$$C_1 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial x_0}}, \quad C_2 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial y_0}}, \quad C_3 = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial z_0}}, \quad C = \frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{dt}},$$

$$\Pi_i = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i}}, \quad X_i = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial \rho_i}}, \quad \Sigma_i = \frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial \rho_i}},$$

$$\Pi = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{dt}}, \quad X = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{dt}}, \quad \Sigma = \frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{dt}},$$

65. Notion de l'énergie de déformation et de mouvement. — Nous ferons remarquer que l'exposition actuelle contient comme cas particulier la statique des corps déformables : il suffit, en effet, de considérer une *modification virtuelle réversible de l'action*, au sens de M. Duhem, au lieu d'envisager, comme nous venons de le faire, une *modification virtuelle réalisable*.

Cette observations va nous conduire à la notion d'énergie de déformation et de mouvement. Proposons-nous de déterminer, pour une *modification réelle*, le travail des forces et moments extérieurs et des efforts et moments de déformation extérieurs pendant un intervalle de temps quelconque ; il nous suffit pour cela de calculer le travail élémentaire relatif au temps dt. Ce dernier est

$$\left\{ \iiint_{s_0} (\xi X_0' + \eta Y_0' + \ldots)\, dx_0 dy_0 dz_0 - \iint_{s_0} (\xi F_0' + \eta G_0' + \ldots)\, d\sigma \right\} dt ;$$

si l'on y remplace $X_0', Y_0', \ldots, F_0', G_0', \ldots$ par leurs expressions en fonction de l'action, et si l'on effectue un calcul inverse de celui qui a conduit à leur définition, on obtient immédiatement, en vertu des équations de Codazzi :

$$\left\{ \iiint_{s_0} \left(\frac{dE}{dt} + \frac{\partial W}{\partial t} \right) dx_0 dy_0 dz_0 \right\} dt,$$

en posant

$$E = \xi \frac{\partial W}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial W}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial W}{\partial \xi} + p \frac{\partial W}{\partial p} + q \frac{\partial W}{\partial q} + r \frac{\partial W}{\partial r} - W.$$

Si l'on considère en particulier le cas dans lequel W ne contient pas t expli-

citement, en sorte que $\frac{\partial W}{\partial t}$ est nul, la valeur précédente devient la différentielle par rapport au temps de l'expression

$$\iiint_{s_0} E dx_0 dy_0 dz_0,$$

qui peut être appelée l'*énergie de déformation et de mouvement à l'instant t.*

Au point où nous venons d'arriver, nous pouvons faire quelques remarques générales importantes, qui trouveront de nouveau leur application dans la suite de la théorie de l'action euclidienne.

La seule notion d'action euclidienne de déformation et de mouvement *suffit* pour nous fournir, dans un cas très étendu, une définition *constructive* de la quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement, de l'effort et du moment de déformation, de la force et du moment extérieurs. On peut distinguer une partie dynamique et une partie statique dans la force et le moment extérieurs, en groupant d'une part les termes qui seuls contiennent l'accélération dynamique, et d'autre part les termes qui seuls contiennent ce qu'on pourrait appeler l'*accélération cinématique* ; cette distinction exprime évidemment une extension du *principe de* d'Alembert. De même, supposons le travail extérieur nul, l'énergie de déformation et de mouvement reste invariable dans le temps ; nous obtenons donc la notion de *conservation de l'énergie,* qui traduit simplement l'hypothèse que le milieu est *isolé* du monde extérieur. Nous retrouvons par suite toutes les idées fondamentales de la Mécanique classique, et il est manifeste que la forme particulière qu'elles prennent dans cette dernière vient de ce qu'on envisage seulement l'état de mouvement et de déformation *infiniment voisin de l'état naturel,* où l'on suppose que W et ses dérivées sont nulles.

66. Etat initial et états naturels. Indications générales sur les problèmes auxquels conduit la considération du milieu déformable. — Dans ce qui précède, nous avons considéré la trajectoire de l'état déformé, et, après avoir mis en évidence la *position initiale* (M_0) à un instant déterminé t_0 de cet état déformé, nous lui avons rapporté la position (M) à un instant quelconque t ; des considérations analogues à celles développées au § **56**, et dans lesquelles le paramètre, qui a été alors introduit, est actuellement remplacé par le temps t, peuvent être reprises ici en vue de faire jouer à l'un des états déformés le rôle que l'on a attribué à l'état initial (M_0).

Mais on peut aussi concevoir que les fonctions $x, y, z, \ldots$, qui déterminent la trajectoire de l'état déformé, dépendent d'un paramètre et que l'on distingue une valeur particulière de ce paramètre ; on définira ainsi une suite d'états que l'on pourra qualifier d'*états naturels,* et leur trajectoire qui pourra être appelée la *trajectoire des états naturels* ; on pourra utiliser le nouveau paramètre comme nous l'avons fait dans notre *Note sur la dynamique du point et du corps invariable* et étudier en particulier la trajectoire des états déformés infiniment voisine de la trajectoire des états naturels.

Supposons que, conformément aux indications précédentes, la force et le moment extérieurs soient, pour fixer les idées, donnés au moyen de simples fonctions de x_0, y_0, z_0, t et des éléments qui fixent la position du trièdre $Mx'y'z$. Nous pouvons considérer les équations du § **62** relatives à la force et au moment extérieurs comme des équations aux dérivées partielles relatives à x, y, z et à trois paramètres λ_1, λ_2, λ_3 au moyen desquels on exprime α, α', ... γ''. Ce point de vue est un de ceux qui se présentent le plus naturellement. Les expressions ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, ξ, η, ζ, p, q, r, seront des fonctions de $\frac{\partial x}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial y}{\partial \rho_i}$, $\frac{\partial z}{\partial \rho_i}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, λ_1, ..., $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \rho_i}$, ..., $\frac{d\lambda_1}{dt}$, ..., (en posant toujours $\rho_1 = x_0$, $\rho_2 = y_0$, $\rho_3 = z_0$) que l'on calculera au moyen des formules (54), (55) et (54'), (55').

Supposons que X_0', Y_0', Z_0', L_0', M_0', N_0', ou ce qui revient au même X_0, Y_0, Z_0, L_0, M_0, N_0, soient des fonctions données de x_0, y_0, z_0, t, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3. L'expression W est, après substitution des valeurs de ξ_i, ..., r_i, ξ, ..., r tirées des formules (54), (55) et (54'), (55'), une fonction déterminée de

$$x_0, y_0, z_0, t, \frac{\partial x}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial z_0}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \frac{\partial \lambda_1}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial \lambda_3}{\partial z_0}, \frac{d\lambda_1}{dt}, \frac{d\lambda_2}{dt}, \frac{d\lambda_3}{dt},$$

que nous continuerons de désigner par W, et les équations du problème peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{dt}} = X_0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{dt}} = Y_0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{dt}} = Z_0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_1}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_1}{dt}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = \mathfrak{L}_0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_2}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_2}{dt}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = \mathfrak{M}_0,\\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial \lambda_3}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{d\lambda_3}{dt}} - \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = \mathfrak{N}_0,
\end{aligned}$$

$\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ étant des fonctions de x_0, y_0, z_0, t, x, y, z, λ_1, λ_2, λ_3, qui résultent des définitions du § **63**. Ceci ressort directement des formules des paragraphes précédents, soit d'une façon plus immédiate de ce que les for-

mules de définition de X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ peuvent se résumer dans la relation

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt + \delta \mathfrak{C}_e = 0,$$

c'est-à-dire dans

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt \\
&= \left\{ \iiint_{s_0} (A\delta x + B\delta y + C\delta z + P\delta\lambda_1 + Q\delta\lambda_2 + R\delta\lambda_3) dx_0 dy_0 dz_0 \right\}_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \iint_{s_0} (F_0\delta x + G_0\delta y + H_0\delta z + \mathfrak{I}_0\delta\lambda_1 + \mathfrak{J}_0\delta\lambda_2 + \mathfrak{K}_0\delta\lambda_3) d\sigma_0 dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} (X_0\delta x + Y_0\delta y + Z_0\delta z + \mathfrak{L}_0\delta\lambda_1 + \mathfrak{M}_0\delta\lambda_2 + \mathfrak{N}_0\delta\lambda_3) dx_0 dy_0 dz_0 dt.
\end{aligned}$$

67. Notions du trièdre caché et du W caché. Cas où W ne dépend que de x_0, y_0, z_0, t, ξ_i, η_i, ζ_i, ξ, η, ζ et est indépendant de p_i, q_i, r_i, p, q, r. Extension de la dynamique du corps déformable classique. Le milieu gyrostatique et l'anisotropie cinétique. — Les considérations que nous avons exposées précédemment à l'égard du trièdre caché et du W caché sont toutes encore applicables au milieu déformable en mouvement. Il suffit seulement d'ajouter que le W caché pourra correspondre à un mouvement caché.

Nous allons examiner particulièrement le cas où W ne dépend que des quantités x_0, y_0, z_0, t, ξ_i, η_i, ζ_i, ξ, η, ζ et non des p_i, q_i, r_i, p, q, r ; les équations du § **66** se réduisent alors aux suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial x}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx}{dt}} = X_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \mathfrak{L}_0 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial y}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy}{dt}} = Y_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \mathfrak{M}_0 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial x_0}} + \frac{\partial}{\partial y_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial y_0}} + \frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial W}{\partial \frac{\partial z}{\partial z_0}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz}{dt}} = Z_0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + \mathfrak{N}_0 = 0,
\end{aligned}$$

dans lesquelles W ne dépend que de x_0, y_0, z_0, t, $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, ..., $\frac{\partial z}{\partial z_0}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, λ_1, λ_2, λ_3, et elles nous montrent que, si nous prenons le cas simple où X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ sont des fonctions données (1) de x_0, y_0, z_0, t, x, y, z,

(1) Nous supposons que X_0, Y_0, Z_0, $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne renferment pas de dérivées de λ_1, λ_2, λ_3, pour simplifier l'exposition et pour indiquer plus facilement ce à quoi nous voulons faire allusion.

$\frac{\partial x}{\partial x_0}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial z_0}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, les trois équations de droite peuvent être résolues par rapport à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; on obtient donc finalement trois équations aux dérivées partielles ne renfermant, avec nos hypothèses, que x_0, y_0, z_0, t et que x, y, z et leurs dérivées premières et secondes.

Envisageons le cas particulier dans lequel les fonctions données $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0$ sont nulles ; il en sera de même pour les valeurs correspondantes des fonctions de l'un quelconque des systèmes (L_0', M_0', N_0'), (L_0, M_0, N_0), (L, M, N). Il en résulte que les équations

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = 0$$

reviennent à

$$C_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} + C_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} + C_3 \frac{\partial y}{\partial z_0} - B_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} - B_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} - B_3 \frac{\partial z}{\partial z_0} = B \frac{dz}{dt} - C \frac{dy}{dt},$$

$$A_1 \frac{\partial z}{\partial x_0} + A_2 \frac{\partial z}{\partial y_0} + A_3 \frac{\partial z}{\partial z_0} - C_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} - C_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} - C_3 \frac{\partial x}{\partial z_0} = C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt},$$

$$B_1 \frac{\partial x}{\partial x_0} + B_2 \frac{\partial x}{\partial y_0} + B_3 \frac{\partial x}{\partial z_0} - A_1 \frac{\partial y}{\partial x_0} - A_2 \frac{\partial y}{\partial y_0} - A_3 \frac{\partial y}{\partial z_0} = A \frac{dy}{dt} - B \frac{dx}{dt},$$

c'est-à-dire à

$$p_{yz} - p_{zy} = \frac{1}{\Delta}\left(B \frac{dz}{dt} - C \frac{dy}{dt}\right), \qquad p_{zx} - p_{xz} = \frac{1}{\Delta}\left(C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt}\right),$$

$$p_{xy} - p_{yx} = \frac{1}{\Delta}\left(A \frac{dy}{dt} - B \frac{dx}{dt}\right),$$

ce qu'on peut interpréter en disant que le mouvement, dans le corps déformable considéré, qui comprend comme cas particulier celui de la théorie classique de l'élasticité, fait naître un *moment* dont les trois composantes sont

$$\frac{1}{\Delta}\left(B \frac{dz}{dt} - C \frac{dy}{dt}\right), \qquad \frac{1}{\Delta}\left(C \frac{dx}{dt} - A \frac{dz}{dt}\right), \qquad \frac{1}{\Delta}\left(A \frac{dy}{dt} - B \frac{dx}{dt}\right),$$

qui a pour effet de *détruire* les égalités :

$$p_{yz} = p_{zy}, \qquad p_{zx} = p_{xz}, \qquad p_{xy} = p_{yx}.$$

Ceci posé, observons que si l'on part d'une trajectoires supposée *donnée* et que l'on en déduise, comme au § **63**, les fonctions $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0$, il peut arriver, dans le cas où ces trois fonctions sont nulles, que ce résultat se présente accidentellement, c'est-à-dire pour un certain ensemble de trajectoires particulières ; mais il peut arriver qu'il se produise quelle que soit la trajectoire (M), que ce soit une conséquence de la nature des milieux (M) et de leurs mouvements, c'est-à-dire de la forme de W.

Envisageons ce dernier cas, qui est particulièrement intéressant ; W est

alors une simple fonction (1) de x_0, y_0, z_0, t, et des dix expressions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, v^2$ définies par les formules suivantes :

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - 1),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2 - 1),$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)^2 - 1\right\} = \frac{1}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2 - 1),$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial y}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial z}{\partial z_0} = \xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3 + \zeta_2\zeta_3,$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial y}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial z}{\partial x_0} = \xi_3\xi_1 + \eta_3\eta_1 + \zeta_3\zeta_1,$$

$$\gamma_3 = \frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial y}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial z}{\partial y_0} = \xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \zeta_1\zeta_2,$$

$$\varphi_1 = \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial x_0} = \xi\,\xi_1 + \eta\,\eta_1 + \zeta\,\zeta_1,$$

$$\varphi_2 = \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial y_0} = \xi\,\xi_2 + \eta\,\eta_2 + \zeta\,\zeta_2,$$

$$\varphi_3 = \frac{dx}{dt}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial z}{\partial z_0} = \xi\,\xi_3 + \eta\,\eta_3 + \zeta\,\zeta_3,$$

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Les équations déduites des §§ **62** et **63** se réduisent soit à

$$\sum\left(\frac{\partial A_i'}{\partial \rho_i} + q_i C_i' - r_i B_i'\right) + \frac{dA'}{dt} + qC' - rB' = X_0', \qquad F_0' = l_0 A_1' + m_0 A_2' + n_0 A_3',$$

$$\sum\left(\frac{\partial B_i'}{\partial \rho_i} + r_i A_i' - p_i C_i'\right) + \frac{dB'}{dt} + rA' - pC' = Y_0', \qquad G_0' = l_0 B_1' + m_0 B_2' + n_0 B_3',$$

$$\sum\left(\frac{\partial C_i'}{\partial \rho_i} + p_i B_i' - q_i A_i'\right) + \frac{dC'}{dt} + pB' - qA' = Z_0', \qquad H_0' = l_0 C_1' + m_0 C_2' + n_0 C_3',$$

où l'on a :

$$A_i' = \xi_i\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \xi_k\frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \xi_j\frac{\partial W}{\partial \gamma_k} + \xi\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

$$B_i' = \eta_i\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \eta_k\frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \eta_j\frac{\partial W}{\partial \gamma_k} + \eta\frac{\partial W}{\partial \varphi_i}, \qquad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

$$C_i' = \zeta_i\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i} + \zeta_k\frac{\partial W}{\partial \gamma_j} + \zeta_j\frac{\partial W}{\partial \gamma_k} + \zeta\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

$$A' = \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\xi + \sum \xi_i\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

$$B' = \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\eta + \sum \eta_i\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

$$C' = \frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\zeta + \sum \zeta_i\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

(1) Le trièdre est complètement caché ; nous pouvons aussi concevoir que nous ayons un milieu simplement ponctuel.

soit encore à

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_0}+\frac{\partial A_2}{\partial y_0}+\frac{\partial A_3}{\partial z_0}+\frac{dA}{dt}=X_0, \qquad F_0=l_0A_1+m_0A_2+n_0A_3,$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial x_0}+\frac{\partial B_2}{\partial y_0}+\frac{\partial B_3}{\partial z_0}+\frac{dB}{dt}=Y_0, \qquad G_0=l_0B_1+m_0B_2+n_0B_3,$$
$$\frac{\partial C_1}{\partial x_0}+\frac{\partial C_2}{\partial y_0}+\frac{\partial C_3}{\partial z_0}+\frac{dC}{dt}=Z_0, \qquad H_0=l_0C_1+m_0C_2+n_0C_3,$$

où l'on a :

$$A_1=\Omega_1\frac{\partial x}{\partial x_0}+\Xi_3\frac{\partial x}{\partial y_0}+\Xi_2\frac{\partial x}{\partial z_0}+\Phi_1\frac{dx}{dt},$$
$$B_1=\Omega_1\frac{\partial y}{\partial x_0}+\Xi_3\frac{\partial y}{\partial y_0}+\Xi_2\frac{\partial y}{\partial z_0}+\Phi_1\frac{dy}{dt},$$
$$C_1=\Omega_1\frac{\partial z}{\partial x_0}+\Xi_3\frac{\partial z}{\partial y_0}+\Xi_2\frac{\partial z}{\partial z_0}+\Phi_1\frac{dz}{dt},$$

avec des expressions analogues pour A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, et

$$A=\Phi_1\frac{\partial x}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial x}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial x}{\partial z_0}+\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{dx}{dt},$$
$$B=\Phi_1\frac{\partial y}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial y}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial y}{\partial z_0}+\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{dy}{dt},$$
$$C=\Phi_1\frac{\partial z}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial z}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial z}{\partial z_0}+\frac{1}{v}\frac{\partial W}{\partial v}\frac{dz}{dt},$$

en posant

$$\Omega_i=\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_i}, \qquad \Xi_i=\frac{\partial W}{\partial \gamma_i}, \qquad \Phi_i=\frac{\partial W}{\partial \varphi_i},$$

soit encore à

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{dA}{dt}=X, \qquad F=lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx},$$
$$\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{dB}{dt}=Y, \qquad G=lp_{xy}+mp_{yy}+np_{zy},$$
$$\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{dC}{dt}=Z, \qquad H=lp_{xz}+mp_{yz}+np_{zz},$$

où l'on a :

$$p_{xx}=\frac{1}{\Delta}\left\{\Omega_1\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^2+\Omega_2\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)^2+\Omega_3\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)^2+2\Xi_1\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}+2\Xi_2\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}+2\Xi_3\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right.$$
$$\left.+\left(\Phi_1\frac{\partial x}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial x}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)\frac{dx}{dt}\right\},$$

$$p_{yx}=\frac{1}{\Delta}\left\{\Omega_1\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}+\Omega_2\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}+\Omega_3\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right.$$
$$+\Xi_1\left(\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}+\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}\right)+\Xi_2\left(\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}+\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)+\Xi_3\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial y}{\partial y_0}+\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)$$
$$\left.+\left(\Phi_1\frac{\partial y}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial y}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial y}{\partial z_0}\right)\frac{dx}{dt}\right\},$$

$$p_{zx}=\frac{1}{\Delta}\left\{\Omega_1\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}+\Omega_2\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}+\Omega_3\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right.$$
$$+\Xi_1\left(\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}+\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}\right)+\Xi_2\left(\frac{\partial z}{\partial z_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}+\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right)+\Xi_3\left(\frac{\partial z}{\partial x_0}\frac{\partial x}{\partial y_0}+\frac{\partial z}{\partial y_0}\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)$$
$$\left.+\left(\Phi_1\frac{\partial z}{\partial x_0}+\Phi_2\frac{\partial z}{\partial y_0}+\Phi_3\frac{\partial z}{\partial z_0}\right)\frac{dx}{dt}\right\},$$

avec des expressions analogues pour p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}. Nous obtenons ainsi les équations les plus générales du mouvement du corps déformable classique.

Pour que l'effort satisfasse aux relations

$$p_{yz} = p_{zy}, \qquad p_{zx} = p_{xz}, \qquad p_{xy} = p_{yx},$$

il suffit que l'on ait

$$\varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = 0,$$

c'est-à-dire que W soit indépendant des arguments φ_1, φ_2, φ_3. Si, d'une manière plus particulière, on doit avoir

$$p_{yz} = p_{zy} = 0, \qquad p_{zx} = p_{xz} = 0, \qquad p_{xy} = p_{yx} = 0,$$

W devient une simple fonction de Δ et de v, et l'on trouve que

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = \frac{\partial W}{\partial \Delta};$$

on se trouve alors dans le cas du mouvement d'un fluide *parfait*.

Lorsque les fonctions $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne sont pas nulles, W contient comme arguments les douze translations ξ_i, η_i, ζ_i, ξ, η, ζ ; d'une part le milieu peut-être regardé comme *gyrostatique*, en donnant à ce mot créé par Lord Kelvin une extension justifiée, et d'autre part le milieu est doué *d'anisotropie cinétique* au sens envisagé par Rankine et depuis par Lord Rayleigh. On fait ainsi reposer par exemple la théorie de la double réfraction de la lumière, telle qu'elle a été exposée par Lord Kelvin et Glazebrook, sur une base purement mécanique.

V. — L'ACTION EUCLIDIENNE A DISTANCE L'ACTION DE CONTRAINTE ET L'ACTION DISSIPATIVE

68. — Action euclidienne de déformation et de mouvement sur un milieu non continu. — Considérons un système discret de n trièdres, dans lequel chaque trièdre sera distingué par un indice i, qui prendra par conséquent les valeurs $1, 2, \ldots, n$. Soit $M_i\, x_i'\, y_i'\, z_i'$ le trièdre d'indice i, dont le sommet M_i aura pour coordonnées x_i, y_i, z_i et les axes $M_i x_i'$, $M_i y_i'$, $M_i z_i'$, pour cosinus directeurs α_i, α_i', α_i'' ; β_i, β_i', β_i'' ; γ_i, γ_i', γ_i'', par rapport à trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy, Oz. Nous supposerons que les quantités x_i, y_i, z_i, α_i, α_i', ..., γ_i'' sont des fonctions du temps t, et nous introduirons les six arguments ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i définis par les formules (54′) et (55′) du § **60** avec l'indice i.

Envisageons une fonction W de deux positions infiniment voisines du système de trièdres $M_i x_i' y_i' z_i'$, c'est-à-dire une fonction de t, de x_i, y_i, z_i, α_i, α_i', ..., γ_i'', et de leurs dérivées premières par rapport à t (i prenant les valeurs $1, 2, \ldots, n$). Proposons-nous de déterminer quelle doit être la forme de W pour que cette fonction reste invariante dans toute transformation infinitésimale du groupe des déplacements euclidiens telle que (60). Observons que les relations (54′) et (55′) du § **60** avec l'indice i permettent, au moyen de formules bien connues, d'exprimer les dérivées premières des neuf cosinus, α_i, α_i', ..., γ_i'',

par rapport à t, au moyen de ces cosinus et de p_i, q_i, r_i et d'autre part d'exprimer les neuf cosinus α_i, α_i', ..., γ_i'' au moyen de ξ_i, η_i, ζ_i et des dérivées premières de x_i, y_i, z_i par rapport à t. Nous pouvons donc finalement exprimer la fonction W que nous cherchons en fonction de t, de x_i, y_i, z_i et de leurs dérivées premières, et enfin de ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, ce que nous indiquerons en écrivant

$$W = W\left(t, x_i, y_i, z_i, \frac{dx_i}{dt}, \frac{dy_i}{dt}, \frac{dz_i}{dt}, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, p_i, q_i, r_i\right).$$

Les variations $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$, δp_i, δq_i, δr_i étant nulles dans le cas présent, comme cela résulte de la théorie bien connue du trièdre mobile, nous avons à écrire, pour la nouvelle forme de W, qu'on a, en vertu des formules (60) prises avec l'indice i, et quels que soient a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3,

$$\sum_i \left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial W}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial W}{\partial z_i}\delta z_i + \frac{\partial W}{\partial \frac{dx_i}{dt}}\delta\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}}\delta\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}}\delta\frac{dz_i}{dt} \right) = 0.$$

Remplaçons δx_i, δy_i, δz_i, par leurs valeurs (60) et $\delta\frac{dx_i}{dt}$, $\delta\frac{dy_i}{dt}$, $\delta\frac{dz_i}{dt}$ par les valeurs qu'on en déduit en différentiant ; égalons à zéro les coefficients de a_1, a_2, a_3, ω_1, ω_2, ω_3 ; il nous vient les six conditions suivantes :

$$\sum_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = 0, \qquad \sum_i \frac{\partial W}{\partial y_i} = 0, \qquad \sum_i \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0, \tag{63}$$

et

$$\sum_i \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}} - \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}} \right) = 0, \tag{64}$$

avec des relations analogues.

Si nous supposons que *les points* (x_i, y_i, z_i) *peuvent décrire toutes les trajectoires possibles*, nous parvenons ainsi à des identités vérifiées par la fonction W des $6n$ arguments x_i, y_i, z_i, $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ et des arguments antérieurs ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, que nous pouvons laisser de côté pour un instant. Cherchons à mettre en évidence la forme qui en résulte pour W.

Commençons par traiter le cas du système des trois équations

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{i=p} \left(y_i \frac{\partial W}{\partial z_i} - z_i \frac{\partial W}{\partial y_i} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=p} \left(z_i \frac{\partial W}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial W}{\partial z_i} \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=p} \left(x_i \frac{\partial W}{\partial y_i} - y_i \frac{\partial W}{\partial x_i} \right) = 0, \end{cases} \tag{65}$$

qui déterminent une fonction W des $3n$ arguments x_i, y_i, z_i. Nous avons déjà rencontré ce système à propos de la statique de la ligne, de la surface et du milieu continu à 3 dimensions, dans les cas $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$. Laissons de côté le cas $p = 1$, où les trois équations se réduisent à deux. Pour $p = 2$ et $p = 3$, nous avons trois équations qui forment un système complet. Pour $p = 2$, nous avons trois équations, six variables et trois solutions indépendantes

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (i = 1,2), \qquad x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 ;$$

pour $p = 3$, nous avons trois équations, neuf variables et six solutions indépendantes

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \quad (i = 1,2,3), \qquad x_ix_j + y_iy_j + z_iz_j \quad (i,j = 1,2,3).$$

Pour $p > 3$, le système est encore complet ; pour le prouver, il suffit de montrer qu'il admet $3p - 3$ solutions indépendantes, le nombre des équations étant 3 et le nombre des variables $3p$; or nous avons effectivement d'abord les p solutions

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \qquad (i = 1,2,\ldots,p,)$$

puis la solution

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

enfin les $2(p-2)$ solutions

$$x_1x_i + y_1y_i + z_1z_i, \qquad x_2x_i + y_2y_i + z_2z_i \qquad (i = 3,4,5,\ldots,p),$$

qui sont toutes indépendantes ; W est donc une fonction des $3(p-1)$ arguments indépendants que nous venons d'énumérer.

Revenons maintenant au système proposé formé des conditions (63) et (64). Les conditions (63) prouvent que W ne dépend de $x_1,\ldots x_n$, $y_1,\ldots y_n$, $z_1,\ldots z_n$ que par l'intermédiaire des expressions

$$\begin{array}{llll} X_2 = x_2 - x_1, & X_3 = x_3 - x_1, & \ldots, & X_n = x_n - x_1, \\ Y_2 = y_2 - y_1, & Y_3 = y_3 - y_1, & \ldots, & Y_n = y_n - y_1, \\ Z_2 = z_2 - z_1, & Z_3 = z_3 - z_1, & \ldots, & Z_n = z_n - z_1. \end{array}$$

Posons d'autre part,

$$\frac{dx_i}{dt} = X_{n+i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = Y_{n+i}, \qquad \frac{dz_i}{dt} = Z_{n+i},$$

et écrivons que les équations (64) sont vérifiées par la fonction W des arguments X_2, X_3, ..., X_{2n} ; Y_2, Y_3, ..., Y_{2n} ; Z_2, Z_3, ..., Z_{2n}. Considérons, par exemple, la première des équations (64) ; il vient

$$-y_1\left(\frac{\partial W}{\partial Z_2} + \frac{\partial W}{\partial Z_3} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial Z_n}\right) + z_1\left(\frac{\partial W}{\partial Y_2} + \frac{\partial W}{\partial Y_3} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial Y_n}\right)$$
$$+ (y_1 + Y_2)\frac{\partial W}{\partial Z_2} - (z_1 + Z_2)\frac{\partial W}{\partial Y_2} + \ldots = 0 ;$$

γ_1 et z_1 disparaissent, et il reste la première des équations

$$\sum_{i=2}^{i=2n} \left(Y_i \frac{\partial W}{\partial Z_i} - Z_i \frac{\partial W}{\partial Y_i} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{i=2n} \left(Z_i \frac{\partial W}{\partial X_i} - X_i \frac{\partial W}{\partial Z_i} \right) = 0,$$

$$\sum_{i=2}^{i=2n} \left(X_i \frac{\partial W}{\partial Y_i} - Y_i \frac{\partial W}{\partial X_i} \right) = 0.$$

Nous tombons donc sur le système (65) où x_i, γ_i, z_i sont remplacés par X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1} et p par $2n - 1$.

Si nous supposons d'abord $n = 2$, nous voyons que W est, abstraction faite des arguments ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, une fonction des expressions indépendantes :

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$X_3 + Y_3^2 + Z_3^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2,$$

$$X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2 = \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_2}{dt}\right)^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2,$$

$$X_2X_3 + Y_2Y_3 + Z_2Z_3 = (x_2 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_1}{dt},$$

$$X_2X_4 + Y_2Y_4 + Z_2Z_4 = (x_2 - x_1)\frac{dx_2}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_2}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_2}{dt},$$

$$X_3X_4 + Y_3Y_4 + Z_3Z_4 = \frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{dy_2}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dz_2}{dt},$$

Donc, finalement, W est une fonction de t, ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i et des *quatre arguments*

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2,$$

$$(x_2 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_1}{dt},$$

$$(x_2 - x_1)\frac{dx_2}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_2}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_2}{dt},$$

$$\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{dy_2}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{dz_2}{dt}.$$

Si nous supposons $n > 2$, nous voyons que W est, abstraction faite des

arguments ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, une fonction des $6(n-1)$ expressions indépendantes :

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = \begin{cases} \text{soit} & (x_i-x_1)^2+(y_i-y_1)^2+(z_i-z_1)^2 \quad (i=1,2,\dots,n), \\ \text{soit} & \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_k}{dt}\right)^2 = \xi_k^2 + \eta_k^2 + \zeta_k^2, \end{cases}$$

$$X_2X_3+Y_2Y_3+Z_2Z_3 = (x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1),$$

$$X_2X_i+Y_2Y_i+Z_2Z_i = \begin{cases} \text{soit} & (x_2-x_1)(x_i-x_1)+(y_2-y_1)(y_i-y_1)+(z_2-z_1)(z_i-z_1), \\ \text{soit} & (x_2-x_1)\frac{dx_k}{dt}+(y_2-y_1)\frac{dy_k}{dt}+(z_2-z_1)\frac{dz_k}{dt}, \end{cases}$$

$$X_3X_i+Y_3Y_i+Z_3Z_i = \begin{cases} \text{soit} & (x_3-x_1)(x_i-x_1)+(y_3-y_1)(y_i-y_1)+(z_3-z_1)(z_i-z_1) \\ \text{soit} & (x_3-x_1)\frac{dx_k}{dt}+(y_3-y_1)\frac{dy_k}{dt}+(z_3-z_1)\frac{dz_k}{dt}. \end{cases}$$

Remarquons que l'on a

$$(x_i-x_j)(x_i-x_k)+(y_i-y_j)(y_i-y_k)+(z_i-z_j)(z_i-z_k) = \frac{1}{2}(r_{ij}^2+r_{ik}^2-r_{kj}^2),$$

où r est la distance de deux points du système. Par raison de symétrie, on peut avoir à faire figurer dans W des arguments *non indépendants*, et alors on peut prendre, indépendamment de ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i, les arguments suivants :

$$r_{ij}^2 = (x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2,$$

$$\psi_{ij} = \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt}+\frac{dy_i}{dt}\frac{dy_j}{dt}+\frac{dz_i}{dt}\frac{dz_j}{dt},$$

$$\lambda_{ijk} = (x_i-x_j)\frac{dx_k}{dt}+(y_i-y_j)\frac{dy_k}{dt}+(z_i-z_j)\frac{dz_k}{dt};$$

les derniers comprennent des arguments à deux indices λ_{iji} et des arguments à trois indices λ_{ijk} ; ceux-ci figurent seulement quand il y a plus de deux points, et l'on voit que dans ce cas l'action sur deux points est influencée par tous les autres points. Il est facile d'établir les relations de forme assez complexe qui existent entre ces arguments non indépendants ; elles sont analogues aux relations connues entre les distances r_{ij}, lorsque le nombre des points est $\geqq 5$.

Connaissant l'expression de l'action euclidienne W sur le système de trièdres considéré, nous pouvons facilement, par un calcul qui répète ceux que nous avons faits antérieurement, trouver l'expression de la force et du moment extérieurs sur un trièdre quelconque. L'action W étant une fonction de x_i, y_i, z_i, $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ par l'intermédiaire des r_{ij}, ψ_{ij}, λ_{ijk}, il est commode de regarder d'abord W comme une fonction de x_i, y_i, z_i, $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$ et de ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i ; nous aurons

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} W\,dt$$

$$= \Big[\sum_i (A_i\delta x_i + B_i\delta y_i + C_i\delta z_i + P_i\delta\mathfrak{I}_i + Q_i\delta\mathfrak{J}_i + R_i\delta\mathfrak{K}_i)\Big]_{t_1}^{t_2}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\sum_i (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i + L_i\delta\mathfrak{I}_i + M_i\delta\mathfrak{J}_i + N_i\delta\mathfrak{K}_i)dt,$$

en posant

$$A_i = \alpha_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \beta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \gamma_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}, \qquad P_i = \alpha_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + \beta_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + \gamma_i \frac{\partial W}{\partial r_i},$$

$$B_i = \alpha_i' \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \beta_i' \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \gamma_i' \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}, \qquad Q_i = \alpha_i' \frac{\partial W}{\partial p_i} + \beta_i' \frac{\partial W}{\partial q_i} + \gamma_i' \frac{\partial W}{\partial r_i},$$

$$C_i = \alpha_i'' \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \beta_i'' \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \gamma_i'' \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}, \qquad R_i = \alpha_i'' \frac{\partial W}{\partial p_i} + \beta_i'' \frac{\partial W}{\partial q_i} + \gamma_i'' \frac{\partial W}{\partial r_i},$$

où (A_i, B_i, C_i) et (P_i, Q_i, R_i) sont respectivement la quantité de mouvement et le moment de quantité de mouvement du trièdre d'indice i, et

$$X_i = \frac{dA_i}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \frac{dx_i}{dt}}\right) - \frac{\partial W}{\partial x_i}, \qquad L_i = \frac{dP_i}{dt} + C_i \frac{dy_i}{dt} - B_i \frac{dz_i}{dt},$$

$$Y_i = \frac{dB_i}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}}\right) - \frac{\partial W}{\partial y_i}, \qquad M_i = \frac{dQ_i}{dt} + A_i \frac{dz_i}{dt} - C_i \frac{dx_i}{dt},$$

$$Z_i = \frac{dC_i}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}}\right) - \frac{\partial W}{\partial z_i}, \qquad N_i = \frac{dR_i}{dt} + B_i \frac{dx_i}{dt} - A_i \frac{dy_i}{dt},$$

où (X_i, Y_i, Z_i) et (L_i, M_i, N_i) sont respectivement la force extérieure et le moment extérieur sur le trièdre d'indice i; il reste, dans ce calcul, ce qui est facile, à mettre en évidence les arguments r_{ij}, ψ_{ij}, γ_{ijk}.

Remarquons que l'expression de la force extérieure se trouve décomposée en deux parties ; la première, qui dépend des segments (A_i, B_i, C_i), (P_i, Q_i, R_i) et de leurs dérivées, est la partie proprement dynamique ; la seconde, qui résulte de la présence des arguments r_{ij}, ψ_{ij}, λ_{ijh} dans W, correspond à la force que le trièdre d'indice i subit de la part de tous les autres trièdres du système. Considérons l'expression

$$\sum_i \Big[X_i \frac{dx_i}{dt} + Y_i \frac{dy_i}{dt} + Z_i \frac{dz_i}{dt} + L_i(\alpha_i p_i + \beta_i q_i + \gamma_i r_i) + M_i(\alpha_i' p_i + \beta_i' q_i + \gamma_i' r_i) + N_i(\alpha_i'' p_i + \beta_i'' q_i + \gamma_i'' r_i) \Big] dt,$$

qui représente la somme des travaux élémentaires des forces appliquées aux différents trièdres. Si nous la calculons en remplaçant X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i par les valeurs précédentes, nous trouvons, pour le travail élémentaire relatif à la partie dynamique de la force extérieure et du moment extérieur, l'expression suivante :

$$\sum_i \Big[\frac{d}{dt}\Big(\xi_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial r_i} \Big) - \Big(\frac{\partial W}{\partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial \eta_i} \frac{d\eta_i}{dt} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial r_i} \frac{dr_i}{dt} \Big) \Big] dt,$$

et pour le travail élémentaire relatif aux forces qui s'exercent entre les trièdres du système

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx_i}{dt}} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}} + \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}} \right) - \left(\frac{\partial W}{\partial \frac{dx_i}{dt}}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}}\frac{d^2z_i}{dt^2} + \frac{\partial W}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt} \right) \right] dt.$$

Si nous ajoutons ces deux expressions, et si nous posons

$$E = \sum_i \left(\xi_i \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial W}{\partial \zeta_i} + p_i \frac{\partial W}{\partial p_i} + q_i \frac{\partial W}{\partial q_i} + r_i \frac{\partial W}{\partial r_i} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dx_i}{dt}} + \frac{dy_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dy_i}{dt}} + \frac{dz_i}{dt}\frac{\partial W}{\partial \frac{dz_i}{dt}} - W \right),$$

nous voyons que la somme des travaux élémentaires est

$$dE + \frac{\partial W}{\partial t}\, dt;$$

en supposant W indépendant de t, et en donnant à E le nom d'*énergie de mouvement et de position* du système considéré de trièdres, nous obtenons une proposition entièrement analogue à celle du § **65**.

Il est facile de déduire de ce qui précède une dynamique des systèmes établie sur le même plan que la théorie classique, sans se borner, comme dans cette dernière, à envisager des forces centrales. L'exposition actuelle présente, d'ailleurs, cet avantage de rattacher à leur véritable origine les diverses lois de force à distance étudiées par Gauss, Riemann, Weber et Clausius (1), qui introduisent toutes uniquement les arguments r_{ij}, ψ_{ij}, γ_{ijk}.

69. L'action euclidienne de contrainte et l'action euclidienne dissipative. — Les considérations que nous venons de développer à l'égard de l'action euclidienne à distance conduisent de la manière la plus naturelle à la notion de *contrainte*, qui est due à Gauss et que Hertz a appliquée, comme on sait, à l'étude des fondements de la mécanique, en suivant une voie déjà parcourue par Beltrami, R. Lipschitz et M. G. Darboux (2).

(1) Voir R. Reiff et A. Sommerfeld, *Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, **52**, p. 3-62.

(2) Beltrami, *Sulla teoria generale dei parametri differenziali, Mem. della R. Accad. di Bologna*, 25 fev., 1869.

R. Lipschitz, *Untersuchungen eines Problems der Variationsrechnung, in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist, Journ. für die reine und angewandte Mathematik*, **74**, p. 116-149, 1872 ; *Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges, ibid.*, **82**, pp. 311-342, 1877.

G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 2e Partie, Livre V, Chap. VI, VII, VIII, Paris, 1889.

Soit, pour simplifier, un point qui, lorsque son mouvement est *libre*, décrit une trajectoire définie par les trois fonctions x_0, y_0, z_0 du temps t ; désignons, d'autre part, par x, y, z les fonctions du temps t qui définissent sa trajectoire, lorsqu'il est assujetti à des liaisons. Nous pouvons envisager les deux points (X, Y, Z), (X_0, Y_0, Z_0), dont les coordonnées s'obtiennent, par exemple, par les formules

$$X = x + \frac{dx}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2}\,dt^2, \qquad X_0 = x_0 + \frac{dx_0}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2x_0}{dt^2}\,dt^2,$$

$$Y = y + \frac{dy}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dt^2}\,dt^2, \qquad Y_0 = y_0 + \frac{dy_0}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2y_0}{dt^2}\,dt^2,$$

$$Z = z + \frac{dz}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dt^2}\,dt^2, \qquad Z_0 = z_0 + \frac{dz_0}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2z_0}{dt^2}\,dt^2,$$

qui proviennent du développement de Taylor limité aux trois premiers termes. En admettant que les liaisons sont *sans frottement*, on peut écrire qu'à l'instant t considéré on a

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy_0}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz_0}{dt}.$$

Cela posé, l'introduction de la notion de contrainte due à Gauss revient, après avoir considéré, pour les deux points (X, Y, Z) et (X_0, Y_0, Z_0), dont nous désignons la distance par r, l'*action euclidienne à distance* $U_1(r)$, à remplacer r par sa valeur, de sorte qu'on est amené à la fonction U de l'argument γ défini par la formule

$$\gamma^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_0}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z_0}{dt^2}\right)^2.$$

Si nous appliquons alors la méthode de l'action variable, nous aurons

$$\delta U = \mathcal{X}\left(\delta\frac{d^2x}{dt^2} - \delta\frac{d^2x_0}{dt^2}\right) + \mathcal{Y}\left(\delta\frac{d^2y}{dt^2} - \delta\frac{d^2y_0}{dt^2}\right) + \mathcal{Z}\left(\delta\frac{d^2z}{dt^2} - \delta\frac{d^2z_0}{dt^2}\right),$$

en posant

$$\mathcal{X} = \frac{1}{\gamma}\frac{dU}{d\gamma}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x_0}{dt^2}\right), \quad \mathcal{Y} = \frac{1}{\gamma}\frac{dU}{d\gamma}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2y_0}{dt^2}\right), \quad \mathcal{Z} = \frac{1}{\gamma}\frac{dU}{d\gamma}\left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{d^2z_0}{dt^2}\right);$$

si avec Gauss, on nomme *contrainte* l'argument γ, la force $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ peut être appelée la *force de contrainte* appliquée au point (x, y, z) et être regardée comme ayant pour effet d'empêcher le point de prendre son mouvement *libre* ; la force $-\mathcal{X}$, $-\mathcal{Y}$, $-\mathcal{Z}$ appliquée au point (x_0, y_0, z_0) a, au contraire, pour effet de changer le mouvement libre dans le mouvement contraint.

La différence essentielle entre la conception actuelle de la force et celle qui résulte des lois du mouvement de Newton est la suivante : dans cette dernière, on considère l'action relative à deux positions infiniment voisines, l'une actuelle, l'autre future, *sur une même trajectoire* ; dans la conception de Gauss et de Hertz, l'action se rapporte à deux positions futures, l'une sur la trajectoire dite *libre*, l'autre sur la trajectoire dite *contrainte* ; dans les deux cas, on

a évidemment une théorie qui permet de *prédire* le mouvement futur, ce qui est le but de la dynamique du point ; mais en outre, et c'est le point que nous voulions mettre particulièrement en évidence, l'action est *euclidienne*.

Il est intéressant de remarquer à ce sujet que GAUSS a établi explicitement un rapprochement entre l'action de contrainte et la *loi des erreurs*, qui ont en effet même forme. On voit ainsi que le caractère fondamental de la loi des erreurs est l'*invariance euclidienne* de cette loi, et que la nouvelle branche de la Mécanique, qui a été créée par MAXWELL, BOLTZMANN et W. GIBBS sous le nom de *Mécanique statistique*, peut recevoir également la forme déductive que nous essayons de donner ici à la Mécanique ordinaire.

Nous ferons encore observer que les forces de liaison traduisent, aussi bien dans la Mécanique qu'on peut faire dériver des idées de NEWTON que dans celle qui peut se déduire de la notion de contrainte de GAUSS, une *indétermination* qui se produit dans la définition de la force et qui conduit à introduire les multiplicateurs de LAGRANGE.

L'idée de GAUSS peut s'appliquer aussi au frottement, en envisageant une action euclidienne sur les deux points

$$X = x + \frac{dx}{dt}\,dt, \qquad X_0 = x_0 + \frac{dx_0}{dt}\,dt,$$

$$Y = y + \frac{dy}{dt}\,dt, \qquad Y_0 = y_0 + \frac{dy_0}{dt}\,dt,$$

$$Z = z + \frac{dz}{dt}\,dt, \qquad Z_0 = z_0 + \frac{dz_0}{dt}\,dt,$$

le point x_0, y_0, z_0 se rapportant à une trajectoire libre et le point x, y, z à une trajectoire parcourue avec frottement. Comme il s'agit ici d'un frottement de glissement, on doit faire $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\frac{dx}{dt} = \mu\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \mu\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \mu\frac{dz_0}{dt}$; on est amené pour l'action à une fonction de la vitesse $v_0 = \sqrt{\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_0}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dt}\right)^2}$ affectée du facteur $1 - \mu$, ce qui répond précisément à la notion de *dissipation de l'action libre sur le point* x_0, y_0, z_0.

Les arguments r_{ij}, ψ_{ij}, λ_{ijk}, que nous avons considérés au § 68, traduisent en définitive une idée analogue à l'égard d'un trièdre pris isolément dans le système de n trièdres envisagé ; on peut, si l'on veut, distinguer entre ces arguments, et dire que r_{ij} est un argument *potentiel* et ψ_{ij}, λ_{ijk} des arguments *dissipatifs* ; l'hypothèse des forces centrales revient ainsi à ne considérer dans la Mécanique que la dynamique des systèmes sans *frottement à distance*. Des arguments r_{ij}, ψ_{ij}, λ_{ijk}, on peut, d'autre part, dériver l'argument particulier de WEBER $\frac{dr_{ij}}{dt}$, et si du milieu non continu on passe au milieu *continu*, dont la conception repose sur la considération du ds^2 de l'espace, on se trouve amené à introduire dans l'action W les *arguments de viscosité* $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$, $\frac{dz_3}{dt}$,

$\frac{d\gamma_1}{dt}$, $\frac{d\gamma_2}{dt}$, $\frac{d\gamma_3}{dt}$. A côté de tels arguments, qui ont été envisagés pour la première fois par NAVIER et POISSON, on doit évidemment placer aussi des arguments tels que l'argument $\xi_1\xi_2 + \tau_{i1}\tau_2 + \zeta_1\zeta_2$ dont il a été question au § **47**, et tels que les arguments φ_1, φ_2, φ_3 du § **67**. Nous nous bornerons à ces indications sommaires sur la viscosité, qui n'a pas encore été étudiée jusqu'ici d'une manière suffisamment systématique.

VI. — L'ACTION EUCLIDIENNE AU POINT DE VUE EULÉRIEN

70. Les variables indépendantes de Lagrange et d'Euler. Les auxiliaires considérées suivant le point de vue de l'hydrodynamique. – Dans la statique et dans la dynamique du milieu déformable, nous avons pris comme variables indépendantes respectivement x_0, y_0, z_0 et x_0, y_0, z_0, t; dans le premier cas (statique), on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point M_0 de l'état naturel (M_0), en concevant que cet état naturel se déforme d'une façon infiniment lente, sans que ses points acquièrent de vitesse, et passe d'une façon continue (1) de la position (M_0) à la position (M); dans le second cas (dynamique), on désigne par x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la position M_0 à un instant déterminé t_0 du point qui, à l'instant t, est en M; la position (M_0) du milieu *joue un rôle particulier*.

Le milieu déformable (M) a été considéré comme engendré par un trièdre $Mx'y'z'$, dont le sommet M a pour coordonnées x, y, z et dont les arêtes ont pour cosinus directeurs $\alpha, \alpha', \alpha''$; β, β', β''; $\gamma, \gamma', \gamma''$ par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz. Dans le cas de la statique, $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ étaient considérés comme fonctions des 3 variables indépendantes x_0, y_0, z_0, et, dans le cas de la dynamique, comme fonctions des 4 variables indépendantes x_0, y_0, z_0, t. Dans un cas comme dans l'autre, nous dirons que les variables indépendantes envisagées sont les *variables de* LAGRANGE, et nous écrirons, si nous voulons spécifier cette conception :

$$(66)\quad x = x(x_0, y_0, z_0), \qquad y = y(x_0, y_0, z_0), \qquad z = z(x_0, y_0, z_0),$$

ou

$$(66')\quad x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t),$$

et de même, soit

$$(67)\quad \alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0), \qquad \alpha' = \alpha'(x_0, y_0, z_0), \qquad \alpha'' = \alpha''(x_0, y_0, z_0),$$

(1) Dans cette conception de la déformation infiniment lente d'un milieu, analogue à la transformation réversible de la Thermodynamique, nous avons défini la force et le moment extérieurs, l'effort et le moment de déformation que l'on peut qualifier de *statiques*, puis le travail pour passer de (M_0) à (M), et comme conséquence nous avons obtenu la notion d'*énergie de déformation*, qui s'est placée à côté de celle d'*action* dont on était parti.

soit

$$(67') \quad \alpha = \alpha(x_0, y_0, z_0, t), \quad \alpha' = \alpha'(x_0, y_0, z_0, t), \quad \alpha'' = \alpha''(x_0, y_0, z_0, t),$$

avec des formules analogues pour β, β', β'', γ, γ', γ''.

Mais nous pouvons maintenant concevoir qu'on effectue un changement de variables sur les variables indépendantes. En particulier, par analogie avec ce que l'on fait en Hydrodynamique, nous pouvons concevoir qu'on prenne x, y, z ou x, y, z, t comme variables indépendantes ; nous dirons alors que nous envisageons les *variables d'*Euler.

Comment se présente au premier abord la question ? Dans la théorie développée précédemment, soit qu'on la considère comme définissant les éléments force, etc., soit qu'inversement on cherche à déterminer la position (M), nous avons en évidence les fonctions $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ de x_0, y_0, z_0 ou de x_0, y_0, z_0, t définies par (66), (67) ou par (66'), (67'). Concevons qu'on résolve les équations (66) ou (66') par rapport à x_0, y_0, z_0 ; on a :

$$(68) \quad x_0 = x_0(x, y, z), \qquad y_0 = y_0(x, y, z), \qquad z_0 = z_0(x, y, z),$$

ou

$$(68') \quad x_0 = x_0(x, y, z, t), \quad y_0 = y_0(x, y, z, t), \quad z_0 = z_0(x, y, z, t),$$

et, en portant dans (67) ou (67'),

$$(69) \quad \alpha = \alpha(x, y, z), \qquad \alpha' = \alpha'(x, y, z), \qquad \alpha'' = \alpha''(x, y, z),$$

ou

$$(69') \quad \alpha = \alpha(x, y, z, t), \quad \alpha' = \alpha'(x, y, z, t), \quad \alpha'' = \alpha''(x, y, z, t).$$

Nous avons actuellement en évidence les fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ de x, y, z ou de x, y, z, t, et inversement, par la résolution de (68), (69) ou de (68'), (69'), on repassera à (66), (67) ou à (66'), (67').

Mais on doit compléter ce qui vient d'être dit, en observant que, dans un cas ou dans l'autre, il peut être commode d'introduire des auxiliaires.

Si nous envisageons le cas des variables de Lagrange, il peut arriver que les fonctions x, y, z ne figurent pas explicitement dans la question [1] ; il pourra être convenable d'introduire alors comme auxiliaires [2] les dérivées premières de x, y, z par rapport à x_0, y_0, z_0 ou par rapport à x_0, y_0, z_0, t ; on pourra aussi dans ce cas, en envisageant $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$, introduire

[1] C'est ce qui arrivera normalement, si on part des résultats tels que les donne notre exposition et si on ne modifie pas les expressions de la force, etc., en vertu des formules (66), (67) ou (66'), (67') ; les lettres x, y, z ne figurent pas en effet explicitement dans W.

[2] Ces auxiliaires seront actuellement liées par des relations faciles à former ; la même remarque s'appliquera en général ; elle ne s'introduit pas en Hydrodynamique, où les auxiliaires sont les dérivées par rapport à la seule variable t (et où l'emploi de ces auxiliaires est souvent limité au cas de l'introduction des variables d'Euler).

comme auxiliaires les translations et rotations $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$, si, dans les données, ne figurent, par exemple, que x_0, y_0, z_0 ou que x_0, y_0, z_0, t.

Si nous envisageons le cas des variables d'Euler, on peut indiquer des circonstances analogues où l'emploi d'auxiliaires pourra offrir des avantages. Supposons d'abord que, avec les variables de Lagrange, l'hypothèse que nous venons de considérer soit réalisée ; nous pourrons conserver les auxiliaires indiquées ; la seule différence essentielle avec le cas précédent résidera dans la détermination *ultérieure*, si on l'effectue, des formules (66), (67) ou des analogues. Supposons encore que x_0, y_0, z_0 ne figurent pas dans la question, on pourra alors introduire, comme auxiliaires, les dérivées de x_0, y_0, z_0 par rapport à x, y, z ou par rapport à x, y, z, t.

Suivant ces indications, on voit qu'il peut y avoir utilité à ce que les équations qui servent de point de départ se présentent sous une forme commode au point de vue de l'introduction d'auxiliaires ; on observera que ce but est déjà atteint par les équations obtenues précédemment, dans lesquelles figurent déjà les auxiliaires $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$.

71. Expressions de $\xi_i, \ldots, r_i$ (ou de $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$) au moyen des fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ de x, y, z (ou de x, y, z, t) et de leurs dérivées ; introduction des arguments eulériens. — Des explications qui viennent d'être données résulte qu'il pourra être utile d'avoir les expressions de $\xi_i, \ldots, r_i$ ou de $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$ évaluées non plus conformément aux formules (66), (67) ou (66′), (67′), qui supposent x_0, y_0, z_0 ou x_0, y_0, z_0, t variables indépendantes, mais conformément aux formules (68), (69) ou (68′), (69′), qui introduisent les fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ de x, y, z ou de x, y, z, t.

Raisonnons d'une façon générale sur le cas où t figure ; les formules obtenues donneront, en particulier, le cas où $x, y, z, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ sont indépendants de t. Les quantités $\xi_i, \ldots$ sont calculées, en vertu de (66′) (67′), par les formules [1] :

$$(70)\quad \begin{cases} \xi_i = \alpha \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \alpha' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \alpha'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, & \xi = \alpha \dfrac{dx}{dt} + \alpha' \dfrac{dy}{dt} + \alpha'' \dfrac{dz}{dt}, \\ \eta_i = \beta \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \beta' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \beta'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, & \eta = \beta \dfrac{dx}{dt} + \beta' \dfrac{dy}{dt} + \beta'' \dfrac{dz}{dt}, \\ \zeta_i = \gamma \dfrac{\partial x}{\partial \rho_i} + \gamma' \dfrac{\partial y}{\partial \rho_i} + \gamma'' \dfrac{\partial z}{\partial \rho_i}, & \zeta = \gamma \dfrac{dx}{dt} + \gamma' \dfrac{dy}{dt} + \gamma'' \dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

$$(71)\quad \begin{cases} p_i = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i}, & p = \sum \gamma \dfrac{d\beta}{dt} = -\sum \beta \dfrac{d\gamma}{dt}, \\ q_i = \sum \alpha \dfrac{\partial \gamma}{\partial \rho_i} = -\sum \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i}, & q = \sum \alpha \dfrac{d\gamma}{dt} = -\sum \gamma \dfrac{d\alpha}{dt}, \\ r_i = \sum \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \rho_i} = -\sum \alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial \rho_i}, & r = \sum \beta \dfrac{d\alpha}{dt} = -\sum \alpha \dfrac{d\beta}{dt}, \end{cases}$$

(où $\rho_1 = x_0, \rho_2 = y_0, \rho_3 = z_0$), et cela au moyen de $x_0, y_0, z_0, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$

[1] Nous emploierons pour les dérivées par rapport à t les notations habituelles. (Voir par ex. Appell, *Traité de Mécanique*, T. III, 1re éd., p. 277).

et de leurs dérivées par rapport à x, y, z, calculées en vertu des formules (68′), (69′).

Nous allons à cet effet montrer que les quantités $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$, qui seront appelées désormais *arguments lagrangiens*, s'expriment simplement au moyen des auxiliaires suivantes que nous dénommerons arguments eulériens :

$$(72)\quad \begin{cases} (\xi_i) = \alpha[\xi_i] + \alpha'[\eta_i] + \alpha''[\zeta_i], & (\xi) = \dfrac{\partial \rho_1}{\partial t}, \\ (\eta_i) = \beta[\xi_i] + \beta'[\eta_i] + \beta''[\zeta_i], & (\eta) = \dfrac{\partial \rho_2}{\partial t}, \\ (\zeta_i) = \gamma[\xi_i] + \gamma'[\eta_i] + \gamma''[\zeta_i], & (\zeta) = \dfrac{\partial \rho_3}{\partial t}, \end{cases}$$

$$(73)\quad \begin{cases} (p_i) = \alpha[p_i] + \alpha'[q_i] + \alpha''[r_i], & (p) = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial t} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial t}, \\ (q_i) = \beta[p_i] + \beta'[q_i] + \beta''[r_i], & (q) = \sum \alpha \dfrac{\partial \gamma}{\partial t} = -\sum \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \\ (r_i) = \gamma[p_i] + \gamma'[q_i] + \gamma''[r_i], & (r) = \sum \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = -\sum \alpha \dfrac{\partial \beta}{\partial t}, \end{cases}$$

où nous posons :

$$(74)\quad \begin{cases} [\xi_i] = \dfrac{\partial \rho_i}{\partial x}, & [\eta_i] = \dfrac{\partial \rho_i}{\partial y}, & [\zeta_i] = \dfrac{\partial \rho_i}{\partial z}, \\ [p_1] = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial x} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}, & [q_1] = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial y} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial y}, & [r_1] = \sum \gamma \dfrac{\partial \beta}{\partial z} = -\sum \beta \dfrac{\partial \gamma}{\partial z}, \end{cases}$$

avec des formules analogues pour $[p_2], [q_2], [r_2]$ et pour $[p_3], [q_3], [r_3]$ obtenues en changeant d'abord γ, β en α, γ, puis en β, α, et où nous employons les notations connues (1) $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t}, \dfrac{\partial \beta}{\partial t}, \dfrac{\partial \gamma}{\partial t}, \ldots$.

Différentions les relations (68′) successivement par rapport aux variables de Lagrange ; il vient quatre systèmes de trois équations que l'on peut écrire, en vertu des notations (70) et (72),

$$(75)\quad \xi_i(\xi_i) + \eta_i(\eta_i) + \zeta_i(\zeta_i) = 1, \quad \xi_j(\xi_k) + \eta_j(\eta_k) + \zeta_j(\zeta_k) = 0, \quad (j \neq k),$$

$$(76)\quad \begin{cases} (\xi) + \xi(\xi_1) + \eta(\eta_1) + \zeta(\zeta_1) = 0, \\ (\eta) + \xi(\xi_2) + \eta(\eta_2) + \zeta(\zeta_2) = 0, \\ (\zeta) + \xi(\xi_3) + \eta(\eta_3) + \zeta(\zeta_3) = 0, \end{cases}$$

ces trois dernières relations (76) pouvant s'écrire, en vertu des précédentes (75) (et ainsi que cela résultera des formules (78) données plus loin) :

$$(76')\quad \begin{cases} \xi + \xi_1(\xi) + \xi_2(\eta) + \xi_3(\zeta) = 0, \\ \eta + \eta_1(\xi) + \eta_2(\eta) + \eta_3(\zeta) = 0, \\ \zeta + \zeta_1(\xi) + \zeta_2(\eta) + \zeta_3(\zeta) = 0. \end{cases}$$

Avant de résoudre les équations (75) et (76), observons qu'on peut rem-

(1) Voir Appell, *Traité de Mécanique*, T. III, 1re éd., p. 277.

placer ces systèmes par des systèmes équivalents, qui s'obtiennent en différentiant les relations (66′) successivement par rapport aux variables d'Euler x, y, z, t, et qui, en vertu des notations (72), peuvent s'écrire (en multipliant par $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant, etc).

$$(75'') \quad \begin{cases} \alpha = \sum(\xi_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, & \beta = \sum(\eta_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, & \gamma = \sum(\zeta_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i}, \\ \alpha' = \sum(\xi_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i}, & \beta' = \sum(\eta_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i}, & \gamma' = \sum(\zeta_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i}, \\ \alpha'' = \sum(\xi_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i}, & \beta'' = \sum(\eta_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i}, & \gamma'' = \sum(\zeta_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i}, \end{cases}$$

auxquelles s'ajoute (76′). Le système (75″) peut d'ailleurs s'écrire, en multipliant par $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant, etc.,

$$(75') \quad \begin{cases} \sum\xi_i(\xi_i) = 1, & \sum\xi_i(\eta_i) = 0, & \sum\xi_i(\zeta_i) = 0, \\ \sum\eta_i(\xi_i) = 0, & \sum\eta_i(\eta_i) = 1, & \sum\eta_i(\zeta_i) = 0, \\ \sum\zeta_i(\xi_i) = 0, & \sum\zeta_i(\eta_i) = 0, & \sum\zeta_i(\zeta_i) = 1. \end{cases}$$

Observons encore la forme suivante, qui entraîne (75), est intermédiaire entre (75″) et (75), enfin résulte des formules (70) combinées avec (75) et des formules (74) :

$$(75''') \quad \begin{cases} \alpha = \sum\xi_i[\xi_i], & \beta = \sum\eta_i[\xi_i], & \gamma = \sum\zeta_i[\xi_i], \\ \alpha' = \sum\xi_i[\eta_i], & \beta' = \sum\eta_i[\eta_i], & \gamma' = \sum\zeta_i[\eta_i], \\ \alpha'' = \sum\xi_i[\zeta_i], & \beta'' = \sum\eta_i[\zeta_i], & \gamma'' = \sum\zeta_i[\zeta_i]. \end{cases}$$

On voit que les arguments lagrangiens sont fonctions des seuls arguments eulériens et inversement (déjà au moins en ce qui concerne les translations).

Déterminons d'abord les arguments lagrangiens au moyen des arguments eulériens ; désignons par Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \text{ qui est } \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)}, \text{ si } \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1 ;$$

soient $\xi_1', \eta_1', \zeta_1', \xi_2', \eta_2', \zeta_2', \xi_3', \eta_3', \zeta_3'$ les coefficients des éléments du déterminant Δ c'est-à-dire les mineurs affectés du signe convenable, ce qui revient ainsi à poser :

$$\xi_1' = \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2, \quad \eta_1' = \zeta_2\xi_3 - \zeta_3\xi_2, \quad \zeta_1' = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \ldots .$$

On obtient, en résolvant les équations (75) par rapport à (ξ_i), (η_i), (ζ_i), (ξ), (η), (ζ), puis en portant dans (76),

$$(77)\qquad \begin{cases} (\xi_i) = \dfrac{\xi_i'}{\Delta}, & (\xi) = -\dfrac{\xi\xi_1' + \eta\eta_1' + \zeta\zeta_1'}{\Delta}, \\ (\eta_i) = \dfrac{\eta_i'}{\Delta}, & (\eta) = -\dfrac{\xi\xi_2' + \eta\eta_2' + \zeta\zeta_2'}{\Delta}, \\ (\zeta_i) = \dfrac{\zeta_i'}{\Delta}, & (\zeta) = -\dfrac{\xi\xi_3' + \eta\eta_3' + \zeta\zeta_3'}{\Delta}, \end{cases}$$

Inversement, déterminons ξ_i, η_i, ζ_i, ξ, η, ζ en fonction de (ξ_i), (η_i), (ζ_i), (ξ), (η), (ζ) ; nous observons que le déterminant, dont les éléments sont $\Delta(\xi_i)$, $\Delta(\eta_i)$, $\Delta(\zeta_i)$, est le *déterminant adjoint* (1) de Δ, de sorte que nous devons désigner par $\frac{1}{\Delta}$ le déterminant

$$(78)\qquad \frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} (\xi_1) & (\eta_1) & (\zeta_1) \\ (\xi_2) & (\eta_2) & (\zeta_2) \\ (\xi_3) & (\eta_3) & (\zeta_3) \end{vmatrix}.$$

Résolvons les formules (75) et (76) par rapport à ξ_i, η_i, ζ_i, ξ, η, ζ ; il vient (2), en désignant par (ξ_i'), (η_i'), (ζ_i') les coefficients des éléments du déterminant (78),

$$(79)\qquad \begin{cases} \xi_i = \Delta\,(\xi_i'), & \xi = -\Delta\left\{(\xi)(\xi_1') + (\eta)(\xi_2') + (\zeta)(\xi_3')\right\}, \\ \eta_i = \Delta\,(\eta_i'), & \eta = -\Delta\left\{(\xi)(\eta_1') + (\eta)(\eta_2') + (\zeta)(\eta_3')\right\}, \\ \zeta_i = \Delta\,(\zeta_i'), & \zeta = -\Delta\left\{(\xi)(\zeta_1') + (\eta)(\zeta_2') + (\zeta)(\zeta_3')\right\}. \end{cases}$$

Proposons-nous maintenant de déterminer les rotations.

Différentions les relations (67′) successivement par rapport à x, y, z, t ; nous aurons, en employant toujours la notation connue pour les dérivées par rapport au temps (3) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial x} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial t} + \frac{\partial\alpha}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned}$$

(1) Ce déterminant adjoint est le carré de Δ.

(2) Les neuf premières formules de (79) ($i = 1, 2, 3$) sont si l'on veut des conséquences connues de la théorie des déterminants adjoints ; il est clair que tous les calculs actuels pourraient être rattachés à la théorie des formes et à celle des substitutions linéaires.

(3) Nous distinguons $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, ..., suivant la notation employée par M. Appell, *Traité de Mécanique*, T. III, p. 277. Pour x_0, y_0, z_0, nous n'avons pas eu à introduire $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$ qui sont nuls. On observera que les x_0, y_0, z_0 actuels sont des fonctions de x, y, z, t qui, égalées aux anciens x_0, y_0, z_0, définissent les fonctions x, y, z, lesquelles sont ainsi des fonctions implicites ; nous reviendrons plus loin sur ce point.

avec des formules analogues pour les cosinus $\beta, \gamma, \ldots, \gamma''$.

Les formules (74) donnent alors

$$\begin{aligned}
[p_1] &= \sum p_i[\xi_i], \quad [p_2] = \sum q_i[\xi_i], \quad [p_3] = \sum r_i[\xi_i],\\
[q_1] &= \sum p_i[\eta_i], \quad [q_2] = \sum q_i[\eta_i], \quad [q_3] = \sum r_i[\eta_i],\\
[r_1] &= \sum p_i[\zeta_i], \quad [r_2] = \sum q_i[\zeta_i], \quad [r_3] = \sum r_i[\zeta_i],
\end{aligned}$$

et les formules (73) donnent, eu égard aux formules (72),

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(p_1) = \sum p_i(\xi_i), \quad (p_2) = \sum q_i(\xi_i), \quad (p_3) = \sum r_i(\xi_i),\\
&(q_1) = \sum p_i(\eta_i), \quad (q_2) = \sum q_i(\eta_i), \quad (q_3) = \sum r_i(\eta_i),\\
&(r_i) = \sum p_i(\zeta_i), \quad (r_2) = \sum q_i(\zeta_i), \quad (r_3) = \sum r_i(\zeta_i),\\
&\qquad (p) = p_1(\xi) + p_2(\eta) + p_3(\zeta) + p,\\
&\qquad (q) = q_1(\xi) + q_2(\eta) + q_3(\zeta) + q,\\
&\qquad (r) = r_1(\xi) + r_2(\eta) + r_3(\zeta) + r,
\end{aligned}\right.$$

qui nous donnent les derniers arguments eulériens (p_i), (q_i), (r_i), (p), (q), (r) au moyen des arguments lagrangiens (il suffit d'y remplacer (ξ_1), ... par leurs valeurs).

Pour obtenir inversement les derniers arguments lagrangiens p_1, ..., nous pourrions résoudre le système (80), mais on peut aussi directement différentier les relations (69′) successivement par rapport à x_0, y_0, z_0, t ; nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial x_0} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_0},\\
\frac{\partial \alpha}{\partial y_0} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y_0},\\
\frac{\partial \alpha}{\partial z_0} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z_0} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z_0},\\
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Les relations (71) nous donnent alors, en tenant compte de (70) :

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned}
p_1 &= (p_1)\xi_1 + (q_1)\eta_1 + (r_1)\zeta_1,\\
q_1 &= (p_2)\xi_1 + (q_2)\eta_1 + (r_2)\zeta_1,\\
r_1 &= (p_3)\xi_1 + (q_3)\eta_1 + (r_3)\zeta_1,
\end{aligned}\right.$$

que l'on peut écrire sous la forme intermédiaire

$$\begin{aligned}
p_1 &= [p_1]\frac{\partial x}{\partial x_0} + [q_1]\frac{\partial y}{\partial x_0} + [r_1]\frac{\partial z}{\partial x_0},\\
q_1 &= [p_2]\frac{\partial x}{\partial x_0} + [q_2]\frac{\partial y}{\partial x_0} + [r_2]\frac{\partial z}{\partial x_0},\\
r_1 &= [p_3]\frac{\partial x}{\partial x_0} + [q_3]\frac{\partial y}{\partial x_0} + [r_3]\frac{\partial z}{\partial x_0},
\end{aligned}$$

avec des formules analogues pour p_2, q_2, r_2 ; p_3, q_3, r_3 que l'on obtient en changeant ξ_1, η_1, ζ_1 en ξ_2, η_2, ζ_2, puis en ξ_3, η_3, ζ_3, ou en changeant x_0 en y_0, puis en z_0 ; on a de plus

$$(81') \qquad \begin{cases} p = (p_1)\xi + (q_1)\eta + (r_1)\zeta + (p), \\ q = (p_2)\xi + (q_2)\eta + (r_2)\zeta + (q), \\ r = (p_3)\xi + (q_3)\eta + (r_3)\zeta + (r). \end{cases}$$

72. Equations de la statique du milieu déformable relatives aux variables d'Euler et déduites d'abord des équations obtenues avec les variables de Lagrange. — Nous avons déjà, à propos de la statique du milieu déformable, effectué le passage des variables de Lagrange aux variables d'Euler. Il nous suffit d'abord de compléter les résultats obtenus [1].

Nous avons trouvé des formules telles que les suivantes au § **53** :

$$\Delta p_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0} A_1 + \frac{\partial x}{\partial y_0} A_2 + \frac{\partial x}{\partial z_0} A_3, \qquad \Delta q_{xx} = \frac{\partial x}{\partial x_0} P_1 + \frac{\partial x}{\partial y_0} P_2 + \frac{\partial x}{\partial z_0} P_3,$$

$$\Delta p_{yx} = \frac{\partial y}{\partial x_0} A_1 + \frac{\partial y}{\partial y_0} A_2 + \frac{\partial y}{\partial z_0} A_3, \qquad \Delta q_{yx} = \frac{\partial y}{\partial x_0} P_1 + \frac{\partial y}{\partial y_0} P_2 + \frac{\partial y}{\partial z_0} P_3,$$

$$\Delta p_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x_0} A_1 + \frac{\partial z}{\partial y_0} A_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} A_3, \qquad \Delta q_{zx} = \frac{\partial z}{\partial x_0} P_1 + \frac{\partial z}{\partial y_0} P_2 + \frac{\partial z}{\partial z_0} P_3,$$

où l'on a :

$$A_i = \alpha \frac{\partial W}{\partial \xi_i} + \beta \frac{\partial W}{\partial \eta_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial \zeta_i}, \qquad P_i = \alpha \frac{\partial W}{\partial p_i} + \beta \frac{\partial W}{\partial q_i} + \gamma \frac{\partial W}{\partial r_i}.$$

Supposons que W soit exprimé au moyen des arguments (ξ_i), (η_i), (ζ_i), (p_i), (q_i), (r_i), et posons

$$W = \Delta\Omega.$$

On aura, en vertu des formules (77) du paragraphe précédent,

$$\frac{\partial W}{\partial \xi_i} = \Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} + \Omega \xi_i' = \Delta \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} + \Omega(\xi_i) \right\},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \eta_i} = \Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} + \Omega \eta_i' = \Delta \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} + \Omega(\eta_i) \right\},$$

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta_i} = \Delta \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_i} + \Omega \zeta_i' = \Delta \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_i} + \Omega(\zeta_i) \right\},$$

et par suite, Δ ne dépendant pas des p_i, q_i, r_i,

$$A_i = \Delta \left\{ \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_i} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial \eta_i} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta_i} + \Omega[\xi_i] \right\},$$

$$P_i = \Delta \left\{ \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial p_i} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial q_i} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial r_i} \right\}.$$

[1] Nous chercherons ensuite à obtenir directement les résultats définitifs.

En différentiant les relations (75) par rapport à ξ_i, on a

$$\xi_i \frac{\partial(\xi_j)}{\partial\xi_i} + \eta_i \frac{\partial(\eta_j)}{\partial\xi_i} + \zeta_i \frac{\partial(\zeta_j)}{\partial\xi_i} = -(\xi_i), \quad \xi_j \frac{\partial(\xi_k)}{\partial\xi_i} + \eta_j \frac{\partial(\eta_k)}{\partial\xi_i} + \zeta_j \frac{\partial(\zeta_k)}{\partial\xi_i} = 0 \quad (i \neq j),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial(\xi_j)}{\partial\xi_i} = -(\xi_j)\frac{\xi_i'}{\Delta} = -(\xi_i)(\xi_j),$$
$$\frac{\partial(\eta_j)}{\partial\xi_i} = -(\xi_j)\frac{\eta_i'}{\Delta} = -(\eta_i)(\xi_j),$$
$$\frac{\partial(\zeta_j)}{\partial\xi_i} = -(\xi_j)\frac{\zeta_i'}{\Delta} = -(\zeta_i)(\xi_j);$$

puis, par les relations (80),

$$\frac{\partial(p_j)}{\partial\xi_i} = -(p_j)(\xi_i),$$
$$\frac{\partial(q_j)}{\partial\xi_i} = -(p_j)(\eta_i),$$
$$\frac{\partial(r_j)}{\partial\xi_i} = -(p_j)(\zeta_i),$$

avec des formules analogues pour les dérivées par rapport à η_i, ζ_i. Si l'on pose

$$(A_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}, \qquad (B_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(\eta_i)}, \qquad (C_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(\zeta_i)},$$
$$(P_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(p_i)}, \qquad (Q_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(q_i)}, \qquad (R_i') = \frac{\partial\Omega}{\partial(r_i)},$$

on a ainsi

$$\frac{1}{\Delta}A_i = \Omega[\xi_i] - \big[\{(\xi_i)(A_1') + (\eta_i)(B_1') + (\zeta_i)(C_1')\}[\xi_1] + \{(\xi_i)(P_1') + (\eta_i)(Q_1') + (\zeta_i)(R_1')\}[p_1]$$
$$+ \{(\xi_i)(A_2') + (\eta_i)(B_2') + (\zeta_i)(C_2')\}[\xi_2] + \{(\xi_i)(P_2') + (\eta_i)(Q_2') + (\zeta_i)(R_2')\}[p_2]$$
$$+ \{(\xi_i)(A_3') + (\eta_i)(B_3') + (\zeta_i)(C_3')\}[\xi_3] + \{(\xi_i)(P_3') + (\eta_i)(Q_3') + (\zeta_i)(R_3')\}[p_3]\big].$$

En vertu des formules (72), (73), (74), (75″), et en désignant par $[A_i]$, $[B_i]$, $[C_i]$; $[P_i]$, $[Q_i]$, $[R_i]$ les composantes relativement aux axes Ox, Oy, Oz des deux vecteurs dont les composantes par rapport aux axes Mx', My', Mz' sont respectivement (A_i'), (B_i'), (C_i') ; (P_i'), (Q_i'), (R_i'), on en déduit les trois formules suivantes :

$$p_{xx} = \Omega - \sum [A_i][\xi_i] - \sum [P_i][p_i],$$
$$p_{yx} = \quad - \sum [B_i][\xi_i] - \sum [Q_i][p_i],$$
$$p_{zx} = \quad - \sum [C_i][\xi_i] - \sum [R_i][p_i],$$

avec des formules analogues pour B_i, C_i et p_{xy}, p_{yy}, p_{zy}, p_{xz}, p_{yz}, p_{zz}. On a ensuite

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} P_i = \alpha &\left\{ (\xi_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(p_1)} + (\eta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(q_1)} + (\zeta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(r_1)} \right\} \\ + \beta &\left\{ (\xi_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(p_2)} + (\eta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(q_2)} + (\zeta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(r_2)} \right\} \\ + \gamma &\left\{ (\xi_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(p_3)} + (\eta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(q_3)} + (\zeta_i) \frac{\partial\Omega}{\partial(r_3)} \right\},\end{aligned}$$

et il vient, en tenant compte encore de $(75'')$, les trois formules suivantes :

$$\begin{aligned} q_{xx} &= \alpha [P_1] + \beta [P_2] + \gamma [P_3], \\ q_{yx} &= \alpha [Q_1] + \beta [Q_2] + \gamma [Q_3], \\ q_{zx} &= \alpha [R_1] + \beta [R_2] + \gamma [R_3], \end{aligned}$$

avec des formules analogues pour Q_i, R_i et q_{xy}, q_{yy}, q_{zy}, q_{xz}, q_{yz}, q_{zz}.

73. Equations de la dynamique du milieu déformable relatives aux variables d'Euler et déduites d'abord des équations obtenues avec les variables de Lagrange. — Nous avons aussi, à propos de la dynamique du milieu déformable, effectué le passage des variables de Lagrange aux variables d'Euler. Nous allons d'abord compléter les résultats obtenus.

A_i est augmenté de

$$\begin{aligned}\Delta \Bigg[&\left\{ \alpha \frac{\partial(\xi)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(\xi)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial(\xi)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)} + \left\{ \alpha \frac{\partial(p)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(p)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial'p)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(p)} \\ &+ \left\{ \alpha \frac{\partial(\eta)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(\eta)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial(\eta)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(\eta)} + \left\{ \alpha \frac{\partial(q)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(q)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial'q)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(q)} \\ &+ \left\{ \alpha \frac{\partial(\zeta)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(\zeta)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial(\zeta)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(\zeta)} + \left\{ \alpha \frac{\partial(r)}{\partial\xi_i} + \beta \frac{\partial(r)}{\partial\eta_i} + \gamma \frac{\partial(r)}{\partial\zeta_i} \right\} \frac{\partial\Omega}{\partial(r)} \Bigg] ;\end{aligned}$$

or, d'après (76) et (80),

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\xi)}{\partial\xi_1} &= -(\xi_1)(\xi), & \frac{\partial(\xi)}{\partial\xi_2} &= -(\xi_1)(\eta), & \frac{\partial(\xi)}{\partial\xi_3} &= -(\xi_1)(\zeta), \\ \frac{\partial(p)}{\partial\xi_1} &= -(p_1)(\xi), & \frac{\partial(p)}{\partial\xi_2} &= -(p_1)(\eta), & \frac{\partial(p)}{\partial\xi_3} &= -(p_1)(\zeta), \end{aligned}$$

avec des formules analogues, de sorte qu'en posant

$$\begin{aligned} (A') &= \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)}, & (B') &= \frac{\partial\Omega}{\partial(\eta)}, & (C') &= \frac{\partial\Omega}{\partial(\zeta)}, \\ (P') &= \frac{\partial\Omega}{\partial'(p)}, & (Q') &= \frac{\partial\Omega}{\partial(q)}, & (R') &= \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}, \end{aligned}$$

on a à ajouter à la valeur donnée pour A_i dans le paragraphe précédent, respectivement pour $i = 1, 2, 3$,

$$A(\xi), \qquad A(\eta), \qquad A(\zeta),$$

en posant :

$$-\frac{A}{\Delta} = (A')[\xi_1] + (B')[\xi_2] + (C')[\xi_3] + (P')[p_1] + (Q')[p_2] + (R')[p_3].$$

Les expressions à ajouter aux valeurs de p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} du paragraphe précédent sont donc :

$$\frac{A}{\Delta}\left\{(\xi)\frac{\partial x}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial x}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial x}{\partial z_0}\right\}, \qquad \frac{A}{\Delta}\left\{(\xi)\frac{\partial y}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial y}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial y}{\partial z_0}\right\},$$
$$\frac{A}{\Delta}\left\{(\xi)\frac{\partial z}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial z}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial z}{\partial z_0}\right\};$$

or, d'après les valeurs (76) de (ξ), (η), (ζ), on a

$$(\xi)\frac{\partial x}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial x}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial x}{\partial z_0} = -\xi\sum(\xi_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i} - \eta\sum(\eta_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i} - \zeta\sum(\zeta_i)\frac{\partial x}{\partial \rho_i},$$
$$(\xi)\frac{\partial y}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial y}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial y}{\partial z_0} = -\xi\sum(\xi_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i} - \eta\sum(\eta_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i} - \zeta\sum(\zeta_i)\frac{\partial y}{\partial \rho_i},$$
$$(\xi)\frac{\partial z}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial z}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial z}{\partial z_0} = -\xi\sum(\xi_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i} - \eta\sum(\eta_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i} - \zeta\sum(\zeta_i)\frac{\partial z}{\partial \rho_i},$$

c'est-à-dire, en vertu des formules ($75''$),

$$(\xi)\frac{\partial x}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial x}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial x}{\partial z_0} = -(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta),$$
$$(\xi)\frac{\partial y}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial y}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial y}{\partial z_0} = -(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta),$$
$$(\xi)\frac{\partial z}{\partial x_0} + (\eta)\frac{\partial z}{\partial y_0} + (\zeta)\frac{\partial z}{\partial z_0} = -(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta),$$

de sorte que les expressions à ajouter aux p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} du paragraphe précédent sont :

$$-\frac{A}{\Delta}\frac{dx}{dt}, \qquad -\frac{A}{\Delta}\frac{dy}{dt}, \qquad -\frac{A}{\Delta}\frac{dz}{dt}.$$

On aura des expressions analogues pour p_{yx}, ..., p_{zx}, ..., par le changement évident de A en deux expressions analogues B et C, qui s'en déduisent en remplaçant les $[\xi_i]$, $[p_i]$ par les quantités correspondantes $[\eta_i]$, $[q_i]$ et $[\zeta_i]$, $[r_i]$.

Nous venons d'introduire des notations A, B, C, ; montrons qu'elles sont identiques aux notations introduites dans la théorie lagrangienne :

$$A = \alpha\frac{\partial W}{\partial \xi} + \beta\frac{\partial W}{\partial \eta} + \gamma\frac{\partial W}{\partial \zeta}, \text{ etc.};$$

on a, en effet,

$$\frac{A}{\Delta} = \alpha\left[(A')\frac{\partial(\xi)}{\partial\xi} + (B')\frac{\partial(\eta)}{\partial\xi} + \ldots + (R')\frac{\partial(r)}{\partial\xi}\right] + \beta\left[(A')\frac{\partial(\xi)}{\partial\eta} + \ldots\right] + \gamma\left[(A')\frac{\partial(\xi)}{\partial\zeta} + \ldots\right];$$

or, d'après les formules (76) et (80), on a :

$$\frac{\partial(\xi)}{\partial\xi} = -(\xi_1), \quad \frac{\partial(\eta)}{\partial\xi} = -(\xi_2), \quad \frac{\partial(\zeta)}{\partial\xi} = -(\xi_3),$$
$$\frac{\partial(p)}{\partial\xi} = -(p_1), \quad \frac{\partial(q)}{\partial\xi} = -(p_2), \quad \frac{\partial(r)}{\partial\xi} = -(p_3),$$

et des relations analogues par rapport à η, ζ ; il vient donc, en vertu des relations (72),

$$-\frac{A}{\Delta} = (A')[\xi_1] + (B')[\xi_2] + (C')[\xi_3] + (P')[p_1] + (Q')[p_2] + (R')[p_3].$$

De même, pour les P, Q, R de la théorie lagrangienne, savoir :

$$P = \alpha\frac{\partial W}{\partial p} + \beta\frac{\partial W}{\partial q} + \gamma\frac{\partial W}{\partial r}, \ldots,$$

on a, en vertu des relations (80),

$$\frac{P}{\Delta} = \alpha(P') + \beta(Q') + \gamma(R'), \ldots .$$

Considérons enfin la modification qu'il faut apporter aux formules du § précédent, pour avoir les q_{xx}, ... relatifs au cas actuel de la dynamique.

Les quantités que nous avons appelées P_i sont augmentées respectivement pour $i = 1, 2, 3$ de

$$\Delta\left[(P')\left\{\alpha\frac{\partial(p)}{\partial p_1} + \beta\frac{\partial(p)}{\partial q_1} + \gamma\frac{\partial(p)}{\partial r_1}\right\} + (Q')\left\{\alpha\frac{\partial(q)}{\partial p_1} + \ldots\right\} + (R')\left\{\alpha\frac{\partial(r)}{\partial p_1} + \ldots\right\}\right]$$
$$\Delta\left[(P')\left\{\alpha\frac{\partial(p)}{\partial p_2} + \beta\frac{\partial(p)}{\partial q_2} + \gamma\frac{\partial(p)}{\partial r_2}\right\} + (Q')\left\{\alpha\frac{\partial(q)}{\partial p_2} + \ldots\right\} + (R')\left\{\alpha\frac{\partial(r)}{\partial p_2} + \ldots\right\}\right]$$
$$\Delta\left[(P')\left\{\alpha\frac{\partial(p)}{\partial p_3} + \beta\frac{\partial(p)}{\partial q_3} + \gamma\frac{\partial(p)}{\partial r_3}\right\} + (Q')\left\{\alpha\frac{\partial(q)}{\partial p_3} + \ldots\right\} + (R')\left\{\alpha\frac{\partial(r)}{\partial p_3} + \ldots\right\}\right]$$

ou de

$$\Delta(\xi)\left\{\alpha(P') + \beta(Q') + \gamma(R')\right\}$$
$$\Delta(\eta)\left\{\alpha(P') + \beta(Q') + \gamma(R')\right\}$$
$$\Delta(\zeta)\left\{\alpha(P') + \beta(Q') + \gamma(R')\right\},$$

en vertu des formules (80). On voit que ces accroissements sont

$$P(\xi), \quad P(\eta), \quad P(\zeta) ;$$

les expressions à ajouter aux valeurs de q_{xx}, q_{xy}, q_{xz} du § précédent sont donc

$$\frac{P}{\Delta}\Big\}(\xi)\frac{\partial x}{\partial x_0}+(\eta)\frac{\partial x}{\partial y_0}+(\zeta)\frac{\partial x}{\partial z_0}\Big\},$$

$$\frac{P}{\Delta}\Big\}(\xi)\frac{\partial y}{\partial x_0}+(\eta)\frac{\partial y}{\partial y_0}+(\zeta)\frac{\partial y}{\partial z_0}\Big\},\quad \frac{P}{\Delta}\Big\}(\xi)\frac{\partial z}{\partial x_0}+(\eta)\frac{\partial z}{\partial y_0}+(\zeta)\frac{\partial z}{\partial z_0}\Big\},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{P}{\Delta}(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta),\quad -\frac{P}{\Delta}(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta),\quad -\frac{P}{\Delta}(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta),$$

ou enfin

$$-\frac{P}{\Delta}\frac{dx}{dt},\quad -\frac{P}{\Delta}\frac{dy}{dt},\quad -\frac{P}{\Delta}\frac{dz}{dt}.$$

On aura des expressions analogues pour q_{yx}, ... ; q_{zx}, ..., par le changement de P en Q, puis en R.

74. Variations des arguments eulériens déduites de celles des arguments lagrangiens. — En vue de former directement les équations eulériennes relatives au milieu déformable, nous allons calculer les variations des arguments eulériens. Nous commencerons par les déduire des variations des arguments lagrangiens, afin d'avoir une vérification, puis nous les calculerons directement.

Appliquant le signe δ aux équations (75), il vient trois systèmes tels que le suivant :

$$\begin{aligned}
\xi_1\delta(\xi_1)+\eta_1\delta(\eta_1)+\zeta_1\delta(\zeta_1)&=-(\xi_1)\delta\xi_1-(\eta_1)\delta\eta_1-(\zeta_1)\delta\zeta_1,\\
\xi_2\delta(\xi_1)+\eta_2\delta(\eta_1)+\zeta_2\delta(\zeta_1)&=-(\xi_1)\delta\xi_2-(\eta_1)\delta\eta_2-(\zeta_1)\delta\zeta_2,\\
\xi_3\delta(\xi_1)+\eta_3\delta(\eta_1)+\zeta_3\delta(\zeta_1)&=-(\xi_1)\delta\xi_2-(\eta_1)\delta\eta_3-(\zeta_1)\delta\zeta_3,
\end{aligned}$$

d'où en ayant égard aux relations (77) :

$$\begin{aligned}
-\delta(\xi_1)&=(\xi_1)\big\{(\xi_1\,\delta\xi_1+(\eta_1)\delta\eta_1+(\zeta_1)\delta\zeta_1\big\}+(\xi_2)\big\{(\xi_1)\delta\xi_2+\ldots\big\}+(\xi_3)\big\{(\xi_1)\delta\xi_3+\ldots\big\}\\
&=(\xi_1)\sum(\xi_i)\delta\xi_i+(\eta_1)\sum(\xi_i)\delta\eta_i+(\zeta_1)\sum(\xi_i)\delta\zeta_i,
\end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\delta\xi_i$, $\delta\eta_i$, $\delta\zeta_i$ par leurs valeurs, et en tenant compte des relations (75′) et (80),

$$\begin{aligned}
\delta(\xi_1)=(\eta_1)\delta\kappa'-(\zeta_1)\delta\jmath'&-(\xi_1)\Big\{(\xi_1)\frac{\partial\delta'x}{\partial x_0}+(\xi_2)\frac{\partial\delta'x}{\partial y_0}+(\xi_3)\frac{\partial\delta'x}{\partial z_0}+(p_2)\delta'z-(p_3)\delta'y\Big\}\\
&-(\eta_1)\Big\{(\xi_1)\frac{\partial\delta'y}{\partial x_0}+(\xi_2)\frac{\partial\delta'y}{\partial y_0}+(\xi_3)\frac{\partial\delta'y}{\partial z_0}+(p_3)\delta'x-(p_1)\delta'z\Big\}\\
&-(\zeta_1)\Big\{(\xi_1)\frac{\partial\delta'z}{\partial x_0}+(\xi_2)\frac{\partial\delta'z}{\partial y_0}+(\xi_3)\frac{\partial\delta'z}{\partial z_0}+(p_1)\delta'y-(p_2)\delta'x\Big\};
\end{aligned}$$

mais on a, par exemple,

$$\sum(\xi_i)\frac{\partial\delta' x}{\partial\rho_i}=\frac{\partial\delta' x}{\partial x}\sum(\xi_i)\frac{\partial x}{\partial_{i,i}}+\frac{\partial\delta' x}{\partial y}\sum(\xi_i)\frac{\partial y}{\partial\rho_i}+\frac{\partial\delta' x}{\partial z}\sum(\xi_i)\frac{\partial z}{\partial\rho_i}$$
$$=\alpha\frac{\partial\delta' x}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta' x}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta' x}{\partial z},$$

en vertu des équations (75″). Nous obtenons ainsi la relation suivante :

$$\begin{aligned}\delta(\xi_1)=(\eta_1)\delta\mathrm{K}'-(\zeta_1)\delta\jmath'-(\xi_1)\Big\{&\alpha\frac{\partial\delta' x}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta' x}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta' x}{\partial z}+(p_2)\delta' z-(p_3)\delta' y\Big\}\\ -(\eta_1)\Big\{&\alpha\frac{\partial\delta' y}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta' y}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta' y}{\partial z}+(p_3)\delta' x-(p_1)\delta' z\Big\}\\ -(\zeta_1)\Big\{&\alpha\frac{\partial\delta' z}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta' z}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta' z}{\partial z}+(p_1)\delta' y-(p_2)\delta' x\Big\};\end{aligned}$$

pour avoir $\delta(\eta_1)$, $\delta(\zeta_1)$ il suffit de faire subir une permutation circulaire à (ξ_1), (η_1), (ζ_1), de remplacer α, α', α'' par β, β', β'', puis par γ, γ', γ'' et les p par les q_i, puis par les r_i. On a des systèmes de formules analogues pour $\delta(\xi_2)$, $\delta(\eta_2)$, $\delta(\zeta_2)$; $\delta(\xi_3)$, $\delta(\eta_3)$, $\delta(\zeta_3)$.

On a ensuite, au moyen de (76) et des valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$,

$$\begin{aligned}\delta(\xi)=&-\Big\{\xi\delta(\xi_1)+\eta\delta(\eta_1)+\zeta\delta(\zeta_1)\Big\}-\Big\{(\xi_1)\delta\xi+(\eta_1)\delta\eta+(\zeta_1)\delta\zeta\Big\}\\ =&-(\xi_1)\Big[\frac{d\delta' x}{dt}-(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\frac{\partial\delta' x}{\partial x}-(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)\frac{\partial\delta' x}{\partial y}-(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta)\frac{\partial\delta' x}{\partial z}\\ &+\Big\{q-(p_2)\xi-(q_2)\eta-(r_2)\zeta\Big\}\delta' z-\Big\{r-(p_3)\xi-(q_3)\eta-(r_3)\zeta\Big\}\delta' y\Big]\\ &-(\eta_1)\Big[\frac{d\delta' y}{dt}-(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\frac{\partial\delta' y}{\partial x}-(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)\frac{\partial\delta' y}{\partial y}-(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta)\frac{\partial\delta' y}{\partial z}\\ &+\Big\{r-(p_3)\xi-(q_3)\eta-(r_3)\zeta\Big\}\delta' x-\Big\{p-(p_1)\xi-(q_1)\eta-(r_1)\zeta\Big\}\delta' z\Big]\\ &-(\zeta_1)\Big[\frac{d\delta' z}{dt}-(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\frac{\partial\delta' z}{\partial x}-(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)\frac{\partial\delta' z}{\partial y}-(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta)\frac{\partial\delta' z}{\partial z}\\ &+\Big\{p-(p_1)\xi-(q_1)\eta-(r_1)\zeta\Big\}\delta' y-\Big\{q-(p_2)\xi-(q_2)\eta-(r_2)\zeta\Big\}\delta' x\Big];\end{aligned}$$

or les relations (80) donnent en vertu de (76)

$$\begin{aligned}(p_1)\xi+(q_1)\eta+(r_1)\zeta&=-\Big\{p_1(\xi)+p_2(\eta)+p_3(\zeta)\Big\},\\ (p_2)\xi+(q_2)\eta+(r_2)\zeta&=-\Big\{q_1(\xi)+q_2(\eta)+q_3(\zeta)\Big\},\\ (p_3)\xi+(q_3)\eta+(r_3)\zeta&=-\Big\{r_1(\xi)+r_2(\eta)+r_3(\zeta)\Big\},\end{aligned}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}\delta(\xi)=-(\xi_1)\Big\{&\frac{d\delta' x}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{\partial\delta' x}{\partial x}-\frac{dy}{dt}\frac{\partial\delta' x}{\partial y}-\frac{dz}{dt}\frac{\partial\delta' x}{\partial z}+(q)\delta' z-(r)\delta' y\Big\}\\ -(\eta_1)\Big\{&\frac{d\delta' y}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{\partial\delta' y}{\partial x}-\frac{dy}{dt}\frac{\partial\delta' y}{dy}-\frac{dz}{dt}\frac{\partial\delta' y}{\partial z}+(r)\delta' x-(p)\delta' z\Big\}\\ -(\zeta_1)\Big\{&\frac{d\delta' z}{dt}-\frac{dx}{dt}\frac{\partial\delta' z}{\partial x}-\frac{dy}{dt}\frac{\partial\delta' z}{\partial y}-\frac{dz}{dt}\frac{\partial\delta' z}{\partial z}+(p)\delta' y-(q)\delta' x\Big\}.\end{aligned}$$

On aura des valeurs analogues pour $\delta(\eta)$, $\delta(\zeta)$, en changeant (ξ_1), (η_1), (ζ_1) en (ξ_2), (η_2), (ζ_2), puis en (ξ_3), (η_3), (ζ_3).

Nous avons maintenant, d'après (80),

$$\delta(p_1) = (\xi_1)\delta p_1 + (\xi_2)\delta p_2 + (\xi_3)\delta p_3 + p_1\delta(\xi_1) + p_2\delta(\xi_2) + p_3\delta(\xi_3),$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (75″),

$$\begin{aligned}
\delta(p_1) &= (q_1)\delta_{\mathrm{K}'} - (r_1)\delta_{\mathrm{J}'} \\
&+ \alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial z} + (p_2)\delta_{\mathrm{K}'} - (p_3)\delta_{\mathrm{J}'} \\
&- (p_1)\left\{\alpha\frac{\partial\delta' x}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta' x}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta' x}{\partial z} + (p_2)\delta' z - (p_3)\delta' y\right\} \\
&- (q_1)\left\{\alpha\frac{\partial\delta' y}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta' y}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta' y}{\partial z} + (p_3)\delta' x - (p_1)\delta' z\right\} \\
&- (r_1)\left\{\alpha\frac{\partial\delta' z}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta' z}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta' z}{\partial z} + (p_1)\delta' y - (p_2)\delta' x\right\}
\end{aligned}$$

avec des formules analogues pour $\delta(q_1)$, $\delta(r_1)$, et pour $\delta(p_2)$, $\delta(q_2)$, $\delta(r_2)$; $\delta(p_3)$, $\delta(q_3)$, $\delta(r_3)$.

Nous avons ensuite

$$\delta(p) = \delta p + (\xi)\delta p_1 + (\eta)\delta p_2 + (\zeta)\delta p_3 + p_1\delta(\xi) + p_2\delta(\eta) + p_3\delta(\zeta),$$

c'est-à-dire, en vertu des formules (75″), (76) et (80),

$$\begin{aligned}
\delta(p) &= \frac{d\delta_{\mathrm{I}'}}{dt} - \frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial\delta_{\mathrm{I}'}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + (q)\delta_{\mathrm{K}'} - (r)\delta_{\mathrm{J}'} \\
&- (p_1)\left\{\frac{d\delta' x}{dt} - \frac{\partial\delta' x}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial\delta' x}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial\delta' x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + (q)\delta' z - (r)\delta' y\right\} \\
&- (q_1)\left\{\frac{d\delta' y}{dt} - \frac{\partial\delta' y}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial\delta' y}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial\delta' y}{\partial z}\frac{dz}{dt} + (r)\delta' x - (p)\delta' z\right\} \\
&- (r_1)\left\{\frac{d\delta' z}{dt} - \frac{\partial\delta' z}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial\delta' z}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \frac{\partial\delta' z}{\partial z}\frac{dz}{dt} + (p)\delta' y - (q)\delta' x\right\}
\end{aligned}$$

avec des formules analogues pour $\delta(q)$, $\delta(r)$.

Cherchons maintenant ce que deviennent les formules qui viennent d'être établies, lorsqu'on introduit les auxiliaires δx, δy, δz, δ_{I}, δ_{J}, δ_{K}, définies comme nous l'avons fait antérieurement. On a, par exemple,

$$\frac{\partial\delta x}{\partial x} = \alpha\frac{\partial\delta' x}{\partial x} + \beta\frac{\partial\delta' y}{\partial x} + \gamma\frac{\partial\delta' z}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta' x + \frac{\partial\beta}{\partial x}\delta' y + \frac{\partial\gamma}{\partial x}\delta' y$$

et des expressions analogues pour $\frac{\partial\delta y}{\partial x}$, $\frac{\partial\delta z}{\partial x}$, d'où le système

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial x} &= \frac{\partial\delta' x}{\partial x} + [p_2]\delta' z - [p_3]\delta' y, \\
\beta\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \beta'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \beta''\frac{\partial\delta z}{\partial x} &= \frac{\partial\delta' y}{\partial x} + [p_3]\delta' x - [p_1]\delta' z, \\
\gamma\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \gamma'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \gamma''\frac{\partial\delta z}{\partial x} &= \frac{\partial\delta' z}{\partial x} + [p_1]\delta' y - [p_2]\delta' x,
\end{aligned}$$

et des systèmes analogues pour les dérivées par rapport à y et à z. On a des formules semblables reliant δ_1', δ_J', δ_K' et δ_I, δ_J, δ_K. En vertu des formules (72), et en supposant que le déterminant $|\alpha'\beta'\gamma''| = 1$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
(82)\quad \delta(\xi_1) = &- [\xi_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right) + (\alpha'[\zeta_1] - \alpha''[\eta_1])\delta_I \\
&- [\eta_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta y}{\partial z}\right) + (\alpha''[\xi_1] - \alpha[\zeta_1])\delta_J \\
&- [\zeta_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) + (\alpha[\eta_1] - \alpha'[\xi_1])\delta_K,
\end{aligned}
$$

avec des formules analogues.

La valeur de $\delta(\xi)$ écrite à la page 1 152 peut se mettre sous la forme :

$$
\begin{aligned}
\delta(\xi) = &- (\xi_1)\left\{\frac{\partial\delta' x}{\partial t} + (q)\delta' z - (r)\delta' y\right\} \\
&- (\eta_1)\left\{\frac{\partial\delta' y}{\partial t} + (r)\delta' x - (p)\delta' z\right\} \\
&- (\zeta_1)\left\{\frac{\partial\delta' z}{\partial t} + (p)\delta' y - (q)\delta' x\right\};
\end{aligned}
$$

mais en vertu des formules (73), qui définissent (p), (q), (r), on a des formules telles que la suivante :

$$
\frac{\partial\delta' x}{\partial t} + (q)\delta' z - (r)\delta' y = \alpha\frac{\partial\delta x}{\partial t} + \alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial t} + \alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial t},
$$

et par suite, en vertu des formules (72),

$$
(83)\qquad \delta(\xi) = -\left([\xi_1]\frac{\partial\delta x}{\partial t} + [\eta_1]\frac{\partial\delta y}{\partial t} + [\zeta_1]\frac{\partial\delta z}{\partial t}\right),
$$

formule où l'on pourra revenir aux dérivées $\frac{d}{dt}$, comme nous le ferons voir plus loin avec détail.

On a, en vertu des formules qui définissent δx, δy, δz, δ_I, δ_J, δ_K,

$$
\begin{aligned}
\delta(p_1) = &\ \alpha\left(\alpha\frac{\partial\delta_I}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta_J}{\partial x} + \alpha''\frac{\partial\delta_K}{\partial x}\right) + [\gamma(q_1) - \beta(r_1)]\delta_I \\
&+ \alpha'\left(\alpha\frac{\partial\delta_I}{\partial y} + \alpha'\frac{\partial\delta_J}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta_K}{\partial y}\right) + [\gamma'(q_1) - \beta'(r_1)]\delta_J \\
&+ \alpha''\left(\alpha\frac{\partial\delta_I}{\partial z} + \alpha'\frac{\partial\delta_J}{\partial z} + \alpha''\frac{\partial\delta_K}{\partial z}\right) + [\gamma''(q_1) - \beta''(r_1)]\delta_K
\end{aligned}
$$

$$
-(p_1)\left[\alpha\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right) + \alpha'\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial z} + ..\right)\right]
$$

$$
-(q_1)\left[\alpha\left(\beta\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \beta'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \beta''\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right) + \alpha'\left(\beta\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \beta'\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \beta''\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\beta\frac{\partial\delta x}{\partial z} + ..\right)\right]
$$

$$
-(r_1)\left[\alpha\left(\gamma\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \gamma'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \gamma''\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right) + \alpha'\left(\gamma\frac{\partial\delta x}{\partial y} + \gamma'\frac{\partial\delta y}{\partial y} + \gamma''\frac{\partial\delta z}{\partial y}\right) + \alpha''\left(\gamma\frac{\partial\delta x}{\partial z} + ..\right)\right],
$$

ce qui peut s'écrire, en vertu des formules (73),

$$
\begin{aligned}
(84)\qquad \delta(p_1) = {} & \alpha\left(\alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial z}\right)+(\alpha'[r_1]-\alpha''[q_1])\delta_{\mathrm{I}}\\
& +\alpha'\left(\alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{J}}}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{J}}}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{J}}}{\partial z}\right)+(\alpha''[p_1]-\alpha[r_1])\delta_{\mathrm{J}}\\
& +\alpha''\left(\alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{K}}}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{K}}}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{K}}}{\partial z}\right)+(\alpha[q_1]-\alpha'[p_1])\delta_{\mathrm{K}}\\
& -[p_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta x}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta x}{\partial z}\right)\\
& -[q_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta y}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta y}{\partial z}\right)\\
& -[r_1]\left(\alpha\frac{\partial\delta z}{\partial x}+\alpha'\frac{\partial\delta z}{\partial y}+\alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial z}\right),
\end{aligned}
$$

et l'on a des résultats analogues pour $\delta(q_1)$, ...

Observons enfin que l'on peut écrire :

$$
\begin{aligned}
\delta(p) = {} & \frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial t}+(q)\delta_{\mathrm{K}'}-(r)\delta_{\mathrm{J}'}\\
& -(p_1)\left[\frac{\partial\delta' x}{\partial t}+(q)\delta' z-(r)\delta' y\right]\\
& -(q_1)\left[\frac{\partial\delta' y}{\partial t}+(r)\delta' x-(p)\delta' z\right]\\
& -(r_1)\left[\frac{\partial\delta' z}{\partial t}+(p)\delta' y-(q)\delta' x\right],
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\delta(p) = {} & \alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{J}}}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{K}}}{\partial t}\\
& -(p_1)\left(\alpha\frac{\partial\delta x}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\delta y}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\delta z}{\partial t}\right)\\
& -(q_1)\left(\beta\frac{\partial\delta x}{\partial t}+\beta'\frac{\partial\delta y}{\partial t}+\beta''\frac{\partial\delta z}{\partial t}\right)\\
& -(r_1)\left(\gamma\frac{\partial\delta x}{\partial t}+\gamma'\frac{\partial\delta y}{\partial t}+\gamma''\frac{\partial\delta z}{\partial t}\right),
\end{aligned}
$$

ou enfin :

$$
(85)\qquad \delta(p) = \alpha\frac{\partial\delta_{\mathrm{I}}}{\partial t}+\alpha'\frac{\partial\delta_{\mathrm{J}}}{\partial t}+\alpha''\frac{\partial\delta_{\mathrm{K}}}{\partial t}-[p_1]\frac{\partial\delta x}{\partial t}-[q_1]\frac{\partial\delta y}{\partial t}-[r_1]\frac{\partial\delta z}{\partial t},
$$

formule où l'on pourra aussi revenir aux dérivées $\frac{d}{dt}$. On a deux formules analogues pour $\delta(q)$, $\delta(r)$.

75. Variations des arguments eulériens déterminées directement. — Nous supposons qu'on fasse subir aux *fonctions* x, y, z de x_0, y_0, z_0, t les variations δx, δy, δz. Considérons les relations que l'on

obtient en différentiant les relations (68′) successivement par rapport aux variables de LAGRANGE ; nous en déduisons

$$\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\,\delta[\xi_i] + \frac{\partial y}{\partial \rho_i}\,\delta[\eta_i] + \frac{\partial z}{\partial \rho_i}\,\delta[\zeta_i] + [\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial \rho_i} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial \rho_i} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial \rho_i} = 0 ;$$

mais on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta x}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial \delta x}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta x}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho_i},\\
\frac{\partial \delta y}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial \delta y}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta y}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho_i},\\
\frac{\partial \delta z}{\partial \rho_i} &= \frac{\partial \delta z}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho_i} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial \rho_i};
\end{aligned}$$

si l'on porte les valeurs de ces dérivées dans la relation précédente, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial \rho_i}\Big\{\delta[\xi_i] + [\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial x} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial x} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial x}\Big\}\\
+\,&\frac{\partial y}{\partial \rho_i}\Big\{\delta[\eta_i] + [\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial y} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial y}\Big\}\\
+\,&\frac{\partial z}{\partial \rho_i}\Big\{\delta[\zeta_i] + [\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial z} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial z} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big\} = 0 ;
\end{aligned}$$

les parenthèses, dans cette dernière égalité, sont donc nulles, et l'on a :

$$\begin{aligned}
\delta[\xi_i] &= -\Big\{[\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial x} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial x} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial x}\Big\},\\
\delta[\eta_i] &= -\Big\{[\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial y} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial y}\Big\},\\
\delta[\zeta_i] &= -\Big\{[\xi_i]\,\frac{\partial \delta x}{\partial z} + [\eta_i]\,\frac{\partial \delta y}{\partial z} + [\zeta_i]\,\frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big\}.
\end{aligned}$$

De même, nous avons

$$\delta(\xi) = -\frac{dx}{dt}\,\delta[\xi_1] - \frac{dy}{dt}\,\delta[\eta_1] - \frac{dz}{dt}\,\delta[\zeta_1] - [\xi_1]\,\frac{d\delta x}{dt} - [\eta_1]\,\frac{d\delta y}{dt} - [\zeta_1]\,\frac{d\delta z}{dt};$$

en remplaçant $\delta[\xi_1]$, $\delta[\eta_1]$, $\delta[\zeta_1]$ par les valeurs que nous venons d'obtenir, il vient :

$$\begin{aligned}
\delta(\xi) = \frac{dx}{dt}&\Big\{[\xi_1]\,\frac{\partial \delta x}{\partial x} + [\eta_1]\,\frac{\partial \delta y}{\partial x} + [\zeta_1]\,\frac{\partial \delta z}{\partial x}\Big\}\\
+\,\frac{dy}{dt}&\Big\{[\xi_1]\,\frac{\partial \delta x}{\partial y} + [\eta_1]\,\frac{\partial \delta y}{\partial y} + [\zeta_1]\,\frac{\partial \delta z}{\partial y}\Big\}\\
+\,\frac{dz}{dt}&\Big\{[\xi_1]\,\frac{\partial \delta x}{\partial z} + [\eta_1]\,\frac{\partial \delta y}{\partial z} + [\zeta_1]\,\frac{\partial \delta z}{\partial z}\Big\},\\
&-[\xi_1]\,\frac{d\delta x}{dt} - [\eta_1]\,\frac{d\delta y}{dt} - [\zeta_1]\,\frac{d\delta z}{dt},
\end{aligned}$$

avec des formules analogues pour $\delta(\eta)$, $\delta(\zeta)$. Pour revenir à la formule que nous avons obtenue au § **74**, il suffit de remarquer que l'on a

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial \delta x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \delta x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \delta x}{\partial t},$$
$$\frac{d\delta y}{dt} = \frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \delta y}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \delta y}{\partial t},$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{\partial \delta z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \delta z}{\partial t};$$

mais nous n'utiliserons pas, dans la suite, la formule de la page 1154 et ses analogues. Il convient, en effet, d'observer que, dans le cas où x, y, z, t sont les *variables indépendantes*, le champ d'intégration des intégrales par rapport à x, y, z que nous considérerons *dépendra de* t, et on ne pourra pas intervertir à la façon habituelle (comme avec x_0, y_0, z_0, t) les intégrations par rapport à x, y, z et par rapport à t ; si l'on veut intégrer par parties par rapport à t, il faudra introduire les variables auxiliaires x_0, y_0, z_0, et ne faire usage que de dérivées par rapport à t de la forme $\frac{d}{dt}$, ce qui nécessitera l'emploi de formules telles que celle que nous avons écrite plus haut pour $\partial(\xi)$.

Le calcul à faire pour obtenir $\delta(p_i)$, $\delta(q_i)$, $\delta(r_i)$, $\delta(p)$, $\delta(q)$, $\delta(r)$ repose actuellement, comme celui qui conduit aux expressions de $\delta(\xi_i)$, $\delta(\eta_i)$, $\delta(\zeta_i)$, $\delta(\xi)$, $\delta(\eta)$, $\delta(\zeta)$, sur les formules que nous venons d'obtenir pour $\delta[\xi_i]$, $\delta[\eta_i]$, $\delta[\zeta_i]$; la transformation à faire subir aux expressions $\delta(p)$, $\delta(q)$, $\delta(r)$ données dans le § **74**, pour n'avoir que des dérivées par rapport à t de la forme $\frac{d}{dt}$, est la même que celle que nous avons indiquée pour $\delta(\xi)$, $\delta(\eta)$, $\delta(\zeta)$.

76. L'action de déformation et de mouvement avec les variables d'Euler. Invariance des arguments eulériens. Application de la méthode de l'action variable. — L'action de déformation et de mouvement avec les variables de Lagrange était

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

W étant une fonction de x_0, y_0, z_0, t ; ξ_i, η_i, ζ_i, p_i, q_i, r_i ; ξ, η, ζ, p, q, r.

D'après les formules (79) et (81), (81′), on peut dire aussi que W est une fonction de x_0, y_0, z_0, t ; (ξ_i), (η_i), (ζ_i), (p_i), (q_i), (r_i) ; (ξ), (η), (ζ), (p), (q), (r), et, si l'on pose [1] :

$$\Omega = \frac{W}{\Delta},$$

écrire l'action précédente :

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s} \Omega dx dy dz dt ;$$

[1] Nous supposons Δ positif et ainsi égal à $|\Delta|$.

l'intégration relative à x, y, z est étendue au milieu S, *c'est-à-dire à un domaine variable avec le temps.*

On peut aussi concevoir qu'on arrive à cette dernière action indépendamment de la première. En effet, les arguments lagrangiens sont, comme on l'a vu antérieurement, des *invariants euclidiens ;* mais, puisque les arguments eulériens sont uniquement des fonctions des arguments lagrangiens, d'après les formules (77) et (80), il en résulte qu'ils sont aussi des *invariants euclidiens* ; c'est ce que l'on peut d'ailleurs facilement établir d'une *manière directe* au moyen des formules (82), (83) et (84), (85), en y faisant

$$\begin{gathered}\delta x = (a_1 + \omega_2 z - \omega_3 y)\,dt,\\ \delta y = (b_1 + \omega_3 x - \omega_1 z)\,dt,\\ \delta z = (c_1 + \omega_1 y - \omega_2 x)\,dt,\\ \delta\mathrm{I} = \omega_1 \delta t, \qquad \delta\mathrm{J} = \omega_2 \delta t, \qquad \delta\mathrm{K} = \omega_3 \delta t.\end{gathered}$$

Il en résulte qu'on est ainsi conduit directement à prendre pour *forme de l'action de déformation et de mouvement avec les variables* d'Euler, à l'intérieur de la surface S du milieu déformé et dans l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2, l'intégrale suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathrm{S}} \Omega dx dy dz dt,$$

où *la fonction* Ω *a la forme remarquable*

$$\Omega\left(x_0, y_0, z_0, t, (\xi_i), (\eta_i), (\zeta_i), (p_i), (q_i), (r_i), (\xi), (\eta), (\zeta), (p), (q), (r)\right).$$

Considérons une variation *quelconque* de l'action de déformation et de mouvement à l'intérieur d'une surface (S) du milieu (M) et dans l'intervalle de temps compris entre les instants t_1 et t_2, et à cet effet donnons à x, ... les variations δx, ...

Ecrivons pour un instant l'intégrale sous la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathrm{S}_0} \Omega \Delta dx_0 dy_0 dz_0 dt\,;$$

sa variation est

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathrm{S}_0} (\Delta \delta\Omega + \Omega \delta\Delta) dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

ou

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\mathrm{S}} \left(\delta\Omega + \Omega \frac{\delta\Delta}{\Delta}\right) dx dy dz dt.$$

Or

$$\Delta = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0,)},$$

$$\begin{aligned}\delta\Delta &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(y_0, z_0)}\frac{\partial\delta x}{\partial x_0} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(z_0, x_0)}\frac{\partial\delta x}{\partial y_0} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(x_0, y_0)}\frac{\partial\delta x}{\partial z_0} + \dots\dots \\ &= \left\{\frac{\partial(y, z)}{\partial(y_0, z_0)}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(z_0, x_0)}\frac{\partial x}{\partial y_0} + \frac{\partial(y, z)}{\partial(x_0, y_0)}\frac{\partial x}{\partial z_0}\right\}\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \dots\dots \\ &= \frac{\partial\delta x}{\partial x}\Delta + \frac{\partial\delta y}{\partial y}\Delta + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\Delta,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta} = \frac{\partial\delta x}{\partial y} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z},$$

et par suite la variation de l'intégrale est

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \left\{\Omega\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\right) + \delta\Omega\right\} dxdydzdt.$$

La variation $\delta\Omega$ de Ω est

$$\delta\Omega = \sum\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}\delta(\xi_i) + \frac{\partial\Omega}{\partial(\eta_i)}\delta(\eta_i) + \dots\right\} + \frac{\partial\Omega}{\partial(p)}\delta(p) + \dots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}\delta(r),$$

où $\delta(\xi_i)$, $\delta(\eta_i)$, ..., $\delta(r)$ sont déterminés par les formules des §§ **74** et **75**, écrites de manière à n'y faire figurer que des dérivées par rapport à t de la forme $\frac{d}{dt}$.

Nous pouvons appliquer la formule de GREEN aux termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport à une des variables x, y, z. En ce qui concerne les termes qui renferment explicitement une dérivée par rapport au temps, voici comment nous opérerons (le champ d'intégration par rapport à x, y, z, *variant avec le temps*) ; soit

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_s g\frac{dh}{dt}\,dxdydzdt,$$

un pareil terme ; si nous passons par l'intermédiaire des variables x_0, y_0, z_0, il vient

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} g\Delta\frac{dh}{dt}\,dx_0dy_0dz_0dt,$$

ou, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}&\iiint_{s_0}[g\Delta h]_{t_1}^{t_2}\,dx_0dy_0dz_0 - \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} h\,\frac{d(g\Delta)}{dt}\,dx_0dy_0dz_0dt \\ &= \left[\iiint_{s_0} g\Delta h dx_0dy_0dz_0\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} h\frac{d(g\Delta)}{dt}\,dx_0dy_0dz_0dt \\ &= \left[\iiint_s ghdxdydz\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \frac{h}{\Delta}\frac{d(g\Delta)}{di}\,dxdydzdt,\end{aligned}$$

en revenant (¹) aux variables x, y, z.

Il vient ainsi, en désignant par l, m, n les cosinus directeurs, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, de la normale extérieure à la surface S, qui limite le milieu après déformation à l'instant t, et par $d\sigma$ l'élément d'aire de cette surface

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint \Omega\,dx\,dy\,dz\,dt$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\iint_S \{lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})\delta x+(lp_{xy}+mp_{yy}+np_{zy})\delta y+(lp_{xz}+mp_{yz}+np_{zz})\delta z$$

$$+(lq_{xx}+mq_{yx}+nq_{zx})\delta\mathrm{I}+(lq_{xy}+mq_{yy}+nq_{zy})\delta\mathrm{J}+(lq_{zx}+mq_{yz}+nq_{zz})\delta\mathrm{K}\}\,d\sigma\,dt$$

$$+\left\{\iiint_S\left(\frac{\mathrm{A}}{\Delta}\delta x+\frac{\mathrm{B}}{\Delta}\delta y+\frac{\mathrm{C}}{\Delta}\delta z+\frac{\mathrm{P}}{\Delta}\delta\mathrm{I}+\frac{\mathrm{Q}}{\Delta}\delta\mathrm{J}+\frac{\mathrm{R}}{\Delta}\delta\mathrm{K}\right)dx\,dy\,dz\right\}_{t_1}^{t_2}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_S\left\{\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right)\delta x\right.$$

$$+\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zy}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{B}}{dt}\right)\delta y$$

$$+\left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{C}}{dt}\right)\delta z$$

$$+\left(\frac{\partial q_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial q_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial q_{zx}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{P}}{dt}+p_{yz}-p_{zy}+\frac{\mathrm{C}}{\Delta}\frac{dy}{dt}-\frac{\mathrm{B}}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right)\delta\mathrm{I}$$

$$+\left(\frac{\partial q_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial q_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial q_{zy}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{Q}}{dt}+p_{zx}-p_{xz}+\frac{\mathrm{A}}{\Delta}\frac{dz}{dt}-\frac{\mathrm{C}}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right)\delta\mathrm{J}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial q_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial q_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial q_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{\Delta}\frac{d\mathrm{R}}{dt}+p_{xy}-p_{yx}+\frac{\mathrm{B}}{\Delta}\frac{dx}{dt}-\frac{\mathrm{A}}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right)\delta\mathrm{K}\right\}dx\,dy\,dz\,dt,$$

où l'on a posé avec les notations du § 73,

$$\frac{\mathrm{A}}{\Delta}=-(\mathrm{A}')[\xi_1]-(\mathrm{B}')[\xi_2]-(\mathrm{C}')[\xi_3]-(\mathrm{P}')[p_1]-(\mathrm{Q}')[p_2]-(\mathrm{R}')[p_3],$$

$$\frac{\mathrm{B}}{\Delta}=-(\mathrm{A}')[\tau_{11}]-(\mathrm{B}')[\tau_{12}]-(\mathrm{C}')[\tau_{13}]-(\mathrm{P}')[q_1]-(\mathrm{Q}')[q_2]-(\mathrm{R}')[q_3],$$

$$\frac{\mathrm{C}}{\Delta}=-(\mathrm{A}')[\zeta_1]-(\mathrm{B}')[\zeta_2]-(\mathrm{C}')[\zeta_3]-(\mathrm{P}')[r_1]-(\mathrm{Q}')[r_2]-(\mathrm{R}')[r_3],$$

$$\frac{\mathrm{P}}{\Delta}=[\mathrm{P}]=\alpha\,(\mathrm{P}')+\beta\,(\mathrm{Q}')+\gamma\,(\mathrm{R}'),$$

$$\frac{\mathrm{Q}}{\Delta}=[\mathrm{Q}]=\alpha'\,(\mathrm{P}')+\beta'\,(\mathrm{Q}')+\gamma'\,(\mathrm{R}'),$$

$$\frac{\mathrm{R}}{\Delta}=[\mathrm{R}]=\alpha''(\mathrm{P}')+\beta''(\mathrm{Q}')+\gamma''(\mathrm{R}'),$$

(¹) On peut ici remplacer $\frac{d\Delta}{dt}$ par sa valeur tirée de

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dz}{dt}\right).$$

$$p_{xx} = \Omega - \sum [A_i][\xi_i] - \sum [P_i][p_i] - \frac{A}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$p_{yx} = -\sum [B_i][\xi_i] - \sum [Q_i][p_i] - \frac{A}{\Delta}\frac{dy}{dt},$$

$$p_{zx} = -\sum [C_i][\xi_i] - \sum [R_i][p_i] - \frac{A}{\Delta}\frac{dz}{dt},$$

$$p_{xy} = -\sum [A_i](\eta_i] - \sum [P_i][q_i] - \frac{B}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$p_{yy} = \Omega - \sum [B_i][\eta_i] - \sum [Q_i][q_i] - \frac{B}{\Delta}\frac{dy}{dt},$$

$$p_{zy} = -\sum [C_i][\eta_i] - \sum [R_i][q_i] - \frac{B}{\Delta}\frac{dz}{dt},$$

$$p_{xz} = -\sum [A_i][\zeta_i] - \sum [P_i][r_i] - \frac{C}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$p_{yz} = -\sum [B_i][\zeta_i] - \sum [Q_i][r_i] - \frac{C}{\Delta}\frac{dy}{dt},$$

$$p_{zz} = \Omega - \sum [C_i][\zeta_i] - \sum [R_i][r_i] - \frac{C}{\Delta}\frac{dz}{dt},$$

et en outre

$$q_{xx} = \alpha [P_1] + \beta [P_2] + \gamma [P_3] - \frac{P}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$q_{yx} = \alpha [Q_1] + \beta [Q_2] + \gamma [Q_3] - \frac{P}{\Delta}\frac{dy}{dt},$$

$$q_{zx} = \alpha [Q_1] + \beta [R_2] + \gamma]R_3] - \frac{P}{\Delta}\frac{dz}{dt},$$

avec des formules analogues pour q_{xy}, q_{yy}, q_{zy}, q_{xz}, q_{yz}, q_{zz}.

77. Remarques sur les variations introduites dans les §§ précédents. Application de la méthode de l'action variable suivant la méthode habituelle du calcul des variations. — Nous avons dans le paragraphe précédent utilisé les variations calculées précédemment; il n'est pas inutile de préciser leur signification et de les rapprocher de celles considérées par M. Jordan (1).

Rappelons, en la complétant, l'exposition de M. Jordan. M. Jordan cherche la variation de

$$S\varphi dx dy dz,$$

en supposant d'une part que x, y, z subissent des variations et d'autre part que les fonctions figurant dans φ subissent aussi des variations. Par ce fait, φ subit *deux* variations, dont les effets s'ajoutent; M. Jordan considère successivement la variation due à la variation des fonctions figurant dans φ, puis celle due à la variation de x, y, z qu'il juxtapose à la précédente.

(1) Jordan, *Cours d'Analyse de l'Ecole polytechnique*, 1re éd. T. III, n° 339, p. 533-535; 2e éd. T. III, n° 396, p. 528-530.

On pourrait aussi bien chercher d'abord l'effet complet provenant de la juxtaposition des deux variations sur les lettres u, ..., $u_{\alpha\beta\gamma}$, ... qui figurent dans φ en appelant δu, ... ces variations complètes, on aurait

$$\delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,\delta u + \dots$$

pour la variation *complète* $\delta\varphi$ de φ.

Ceci dit, on remarquera que les variations calculées précédemment sont ce que nous venons d'appeler des variations *complètes* et que le calcul du § précédent est fait à ce dernier point de vue.

Si l'on veut le présenter sous une forme *identique* à celle de M. Jordan, voici ce que l'on devra dire. Nous introduisons, dans ce qui va suivre, des fonctions x_0, y_0, z_0, α, α', ... γ'' de x, y, z qui figurent, au moins en partie, explicitement et par leurs dérivées. Les fonctions x_0, y_0, z_0 de x, y, z, t sont celles qu'il faut mettre dans les seconds membres de (68′), pour en tirer x, y, z en fonction de x_0, y_0, z_0, t. Il en résulte que, par le fait que x, y, z subissent des variations δx, δy, δz, *ces fonctions* x_0, y_0, z_0, de x, y, z, t subissent aussi des variations, que nous désignerons (1) par (δx_0), ..., telles que l'on ait les formules :

$$(86)\qquad \begin{cases} 0 = (\delta x_0) + \dfrac{\partial x_0}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial x_0}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial x_0}{\partial z}\,\delta z, \\ 0 = (\delta y_0) + \dfrac{\partial y_0}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial y_0}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial y_0}{\partial z}\,\delta z, \\ 0 = (\delta z_0) + \dfrac{\partial z_0}{\partial x}\,\delta x + \dfrac{\partial z_0}{\partial y}\,\delta y + \dfrac{\partial z_0}{\partial z}\,\delta z, \end{cases}$$

exprimant que les variations *complètes* de ces fonctions sont nulles. Les variations (δx_0), (δy_0), (δz_0), qui figurent dans ces trois dernières formules, sont les variations qui figureront dans l'exposition *calquée* sur celle de M. Jordan que nous allons donner. Cette remarque semble devoir être rapprochée des considérations développées par M. C. Neumann, dans ses recherches (2) sur les équations de Maxwell et de Hertz ; elle est conforme, d'autre part, aux règles de calcul adoptées par M. H. Poincaré, dans son mémoire *sur la dynamique de l'électron* (3), dont nous parlerons plus loin.

(1) Nous dénoterons d'une façon générale par (δ) les variations obtenues en laissant x, y, z fixes, afin d'éviter toute confusion.

(2) C. Neumann. — *Die elektrischen Kräfte*, T. II, Leipzig, 1898 ; *Über die Maxwell-Hertz'sche Theorie* (*Abhandl. der k. Sächs Gesells. der Wiss. zu Leipzig* ; *Math.-phys. Klasse*, T. XXVII, nos 2 et 8, 1901-1902).

(3) H. Poincaré, *Rend. di Palermo*, Tome XXI, p. 129 et suiv. (1905), 1906. M. H. Poincaré emploie des notations différentes des nôtres, en particulier en ce qui concerne les dérivées par rapport à t, où nos signes d, δ, qui sont ceux de M. Appell (*Traité de Mécanique*, Tome III, 1e éd., p. 277), se trouvent intervertis. Il distingue la variation ordinaire $(\delta\varphi)$ d'une fonction φ au sens Jordan, qu'il désigne par $\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\,d\varepsilon$, de sa variation $\delta\varphi$ (que nous appelons *complète*) qu'il désigne par $\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\,\delta\varepsilon$ [voir en particulier la formule (11 bis), page 140].

En ce qui concerne α, α', ..., γ'', nous aurons des variations $(\delta\alpha)$, ... au sens de M. JORDAN ; mais les variations introduites dans les §§ précédents et que nous continuerons de désigner par $\delta\alpha$, ..., seront des variations complètes, en sorte qu'on aura

$$\delta\alpha = (\delta\alpha) + \frac{\partial\alpha}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\delta z.$$

Ceci revient à dire qu'en introduisant les variations $(\delta\alpha)$, ... *au sens de* M. JORDAN, nous introduisons en outre les auxiliaires $\delta\mathrm{I}'$, $\delta\mathrm{J}'$, $\delta\mathrm{K}'$, que nous *définissons*, au moyen de $(\delta\alpha)$, δx, ..., par

$$(87)\qquad \begin{cases} \delta\mathrm{I}' = \sum\gamma\delta\beta = \sum\gamma(\delta\beta) + [p_1]\delta x + [q_1]\delta y + [r_1]\delta z, \\ \delta\mathrm{J}' = \sum\alpha\delta\gamma = \sum\alpha(\delta\gamma) + [p_2]\delta x + [q_2]\delta y + [r_2]\delta z, \\ \delta\mathrm{K}' = \sum\beta\delta\alpha = \sum\beta(\delta\alpha) + [p_3]\delta x + [q_3]\delta y + [r_3]\delta z. \end{cases}$$

La convention fondamentale, on le voit, est celle exprimée par les relations (86). Elle se retrouvera, dans un travail ultérieur sur la *théorie des températures*, pour les fonctions qui figurent, par exemple, par leurs paramètres différentiels, dans le cas où il s'agit d'un milieu ponctuel, si on fait abstraction des formules où se présentent les coefficients des variations complètes de ces fonctions.

On observera qu'*actuellement* le moyen le plus simple pour effectuer les calculs n'est pas de suivre l'exposition même de M. JORDAN, mais consiste à déterminer, comme nous l'avons fait antérieurement, la variation *complète* de la fonction sous le signe d'intégration. Il ne sera pas cependant inutile, en vue des comparaisons à effectuer lorsqu'on développera plus tard les deux points de vue que suggère la notion de *température*, de suivre également la voie de M. JORDAN.

Nous avons

$$(88)\quad \delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_S \Omega dxdydzdt = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_S \Big[\frac{\partial\Omega}{\partial x_0}(\delta x_0) + \frac{\partial\Omega}{\partial y_0}(\delta y_0) + \frac{\partial\Omega}{\partial z_0}(\delta z_0)$$
$$+\sum\Big\{\frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}\Big(\delta(\xi_i)\Big) + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r_i)}\Big(\delta(r_i)\Big)\Big\} + \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)}\Big(\delta(\xi)\Big) + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}\Big(\delta(r)\Big)$$
$$+\frac{d}{dx}(\Omega\delta x) + \frac{d}{dy}(\Omega\delta y) + \frac{d}{dz}(\Omega\delta z)\Big]dxdydzdt,$$

où le signe (δ) correspond à la variation obtenue en laissant x, y, z fixes, en sorte qu'on a d'une façon générale

$$(89)\qquad (\delta\mathcal{F}) = \delta\mathcal{F} - \frac{d\mathcal{F}}{dx}\delta x - \frac{d\mathcal{F}}{dy}\delta y - \frac{d\mathcal{F}}{dz}\delta z.$$

Nous substituons aux variations (δx_0), ... les auxiliaires $\delta x, \delta y, \delta z, \delta\mathrm{I}', \delta\mathrm{J}', \delta\mathrm{K}'$ définies par les formules (86), (87). Nous devons nous rappeler aussi, *à l'égard de l'intégration par rapport à t* que le champ d'intégration par rapport à x, y, z

varie avec t et que l'on ne peut pas intervertir l'intégration par rapport à t et le système d'intégrations par rapport à x, y, z, *à la façon habituelle employée avec les variables* x_0, y_0, z_0.

Remplaçant (δx_0), (δy_0), (δz_0), $\big(\delta(\xi_i)\big)$, ... par leurs valeurs définies par (89), qui comprend (86), nous obtenons :

$$(90)\quad \delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Omega\,dxdydzdt = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Big[-\frac{d\Omega}{dx}\delta x - \frac{d\Omega}{dy}\delta y - \frac{d\Omega}{dz}\delta z + \sum\Big\{\frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}\delta(\xi_i) + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r_i)}\delta(r_i)\Big\} + \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)}\delta(\xi) + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}\delta(r) + \frac{d}{dx}(\Omega\delta x) + \frac{d}{dy}(\Omega\delta y) + \frac{d}{dz}(\Omega\delta z)\Big]dxdydzdt.$$

Si nous avons égard à part à

$$(91)\quad \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Big[-\frac{d\Omega}{dx}\delta x - \frac{d\Omega}{dy}\delta y - \frac{d\Omega}{dz}\delta z + \frac{d}{dx}(\Omega\delta x) + \frac{d}{dy}(\Omega\delta y) + \frac{d}{dz}(\Omega\delta z)\Big]dxdydzdt,$$

et à

$$(92)\quad \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Big[\sum\Big\{\frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}\delta(\xi_i) + \ldots\Big\} + \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)}\delta(\xi) + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}\delta(r)\Big]dxdydzdt,$$

de même que, dans le § précédent, nous avions eu en somme égard à part à

$$(91')\quad \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Omega\Big(\frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z}\Big)dxdydzdt,$$

et à (92), on voit que le calcul est identique à celui que nous avons fait antérieurement.

78. — Les conceptions lagrangienne et eulérienne de l'action. La méthode de l'action variable appliquée à la conception eulérienne de l'action exprimée avec les variables d'Euler. — Dans son travail *sur la dynamique de l'électron*, présenté dans la séance du 23 juillet 1905 du Cercle de Palerme, M. H. Poincaré paraît avoir mis en évidence, *pour un champ infini*, une conception de l'action autre que celle que nous avons envisagée jusqu'ici. Si l'on précise l'idée de M. H. Poincaré en considérant un *champ fini*, on est conduit à distinguer les deux conceptions suivantes de l'action, l'une *lagrangienne* et l'autre *eulérienne*.

Nous pouvons soumettre la fonction générale W ou Ω à des intégrations par rapport aux variables indépendantes [1] x_0, y_0, z_0, ou par rapport aux variables indépendantes [2] x, y, z, *dans des champs fixes*, puis intégrer par rapport à t.

[1] Dans ce cas, nous désignerons par W la fonction.
[2] Dans ce cas, nous désignerons par Ω la fonction.

1. Partant de l'espace (M_0), concevons qu'un observateur attaché aux axes de référence porte son attention sur une portion (S_0) de cet espace et sur les différentes positions qu'elle prend ultérieurement, savoir : (S) à l'instant quelconque t, (S_1) et (S_2) aux temps t_1 et t_2. Nous envisageons l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \Omega dx dy dz dt,$$

dans laquelle le champ d'intégration (S) par rapport à x, y, z est *variable avec* t, et qui, en effectuant le changement de variables défini par (66′) ou par (68′) prend la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

où W désigne l'expression obtenue en remplaçant dans $\Omega\Delta$ les lettres x, y, z par leurs expressions (66′) et dans laquelle le champ d'intégration (S_0) par rapport à x_0, y_0, z_0 est *indépendant de* t. Nous avons alors la conception *lagrangienne* de l'action.

2. Envisageant toujours un observateur *fixé aux axes de référence*, concevons qu'il porte constamment son attention sur une portion *déterminée et fixe* de l'espace (M) ; désignons par x_0, y_0, z_0 les coordonnées, qui se calculent par les formules (68′), du point M_0 de (M_0) qui viendra, à l'instant t, au point M de coordonnées x, y, z de (M) et soit (S_0) la région décrite par M_0 et qui vient à l'instant t en (S) ; nous pouvons désigner par (S_{01}), (S_{02}) ce que devient la région (S_0), variable avec t, pour les valeurs t_1 et t_2 de t.

Ω renfermant à la fois x, y, z et les fonctions exprimées par les formules (66′), nous envisageons

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \Omega dx dy dz dt,$$

où cette fois le champ d'intégration (S) par rapport à x, y, z est *indépendant de* t et qui, en effectuant le changement de variables défini par (66′) ou par (68′) prend la forme

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{S_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

où le champ d'intégration (S_0) par rapport à x_0, y_0, z_0 est *variable avec* t. Nous avons alors la conception *eulérienne* de l'action.

Nous avons considéré le premier cas dans les paragraphes antérieurs ; nous allons maintenant nous occuper du second. La formule (88), est alors remplacée par la suivante (1) :

$$(88') \quad \left(\delta \int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \Omega dx dy dz dt\right) = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_S \left[\frac{\partial \Omega}{\partial x_0}(\delta x_0) + \frac{\partial \Omega}{\partial y_0}(\delta y_0) + \frac{\partial \Omega}{\partial z_0}(\delta z_0)\right.$$
$$\left. + \sum \left\{ \frac{\partial \Omega}{\partial(\xi_i)}\left(\delta(\xi_i)\right) + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial(r_i)}\left(\delta(r_i)\right)\right\} + \frac{\partial \Omega}{\partial(\xi)}\left(\delta(\xi)\right) + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial(r)}\left(\delta(r)\right)\right] dx dy dz dt;$$

(1) En se reportant à l'exposition de M. Jordan, on observera que la partie $\frac{d}{dx}(\Omega\delta x) + \frac{d}{dy}(\Omega\delta y) + \frac{d}{dz}(\Omega\delta z)$ provient de ce que le champ est mobile et correspond à la variation des lettres x, y, z en tant que variables indépendantes.

et, en vertu de (89), la formule (90) est remplacée par la suivante :

$$(90') \quad \left(\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \Omega dxdydzdt\right) = \int_{t_1}^{t_2}\iiint_s \left[-\frac{d\Omega}{dx}\delta x - \frac{d\Omega}{dy}\delta y - \frac{d\Omega}{dz}\delta z + \sum\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial(\xi_i)}\delta(\xi_i) + \dots\right\} + \frac{\partial\Omega}{\partial(\xi)}\delta(\xi) + \dots + \frac{\partial\Omega}{\partial(r)}\delta(r)\right] dxdydzdt.$$

La suite des calculs ressemble à celle du § **77** ; toutefois, une différence s'introduit, en ce qui concerne les dérivées par rapport au temps ; actuellement, on peut intervertir l'intégration par rapport à t et l'intégration par rapport au champ des variables x, y, z, et cette interversion étant effectuée, l'intégration par rapport au temps doit se faire en envisageant x, y, z comme des constantes ; les intégrations par parties par rapport au temps doivent se faire en les faisant porter sur les dérivées $\frac{\partial}{\partial t}$ et non sur les dérivées $\frac{d}{dt}$, comme on le faisait dans les §§ **76** et **77**, et conformément à la remarque faite dans les §§ **75** et **76**.

L'intégration par parties nous donne actuellement :

$$\begin{aligned}
&\left(\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint \Omega dxdydzdt\right)\\
&= \int_{t_1}^{t_2}\iint_s \Big\{ (l'p'_{xx}+m'p'_{yx}+n'p'_{zx})\delta x+(l'p'_{xy}+m'p'_{yy}+n'p'_{zy})\delta y+(l'p'_{xz}+m'p'_{yz}+n'p'_{zz})\delta z\\
&\quad +(l'q'_{xx}+m'q'_{yx}+n'q'_{zx})\delta\mathfrak{l}+(l'q'_{xy}+m'q'_{yy}+n'q'_{zy})\delta\mathfrak{J}+(l'q'_{xz}+m'q'_{yz}+n'q'_{zz})\delta\mathfrak{K}\Big\}d\sigma' dt\\
&+\left\{\iiint_s\left(\frac{A'}{\Delta}\delta x+\frac{B'}{\Delta}\delta y+\frac{C'}{\Delta}\delta z+\frac{P'}{\Delta}\delta'\mathfrak{l}+\frac{Q'}{\Delta}\delta'\mathfrak{J}+\frac{R'}{\Delta}\delta'\mathfrak{K}\right)dxdydz\right\}_{t_1}^{t_2}\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_s\Big\{\left(\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p'_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p'_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{A'}{\Delta}+\frac{d\Omega}{dx}\right)\delta x\\
&\qquad+\left(\frac{\partial p'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial p'_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial p'_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{B'}{\Delta}+\frac{d\Omega}{dy}\right)\delta y\\
&\qquad+\left(\frac{\partial p'_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial p'_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial p'_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{C'}{\Delta}+\frac{d\Omega}{dz}\right)\delta z\\
&\qquad+\left(\frac{\partial q'_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial q'_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial q'_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{P'}{\Delta}+p'_{yz}-p'_{zy}\right)\delta\mathfrak{l}\\
&\qquad+\left(\frac{\partial q'_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial q'_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial q'_{zy}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{Q'}{\Delta}+p'_{zx}-p'_{xz}\right)\delta\mathfrak{J}\\
&\qquad+\left(\frac{\partial q'_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial q'_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial q'_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{R'}{\Delta}+p'_{xy}-p'_{yx}\right)\delta\mathfrak{K}\Big\}dxdydzdt,
\end{aligned}$$

où l'on a posé, avec les notations des §§ **72** et **73**,

$$\frac{A'}{\Delta} = \frac{A}{\Delta} = -(A')[\xi_1] - (B')[\xi_2] - (C')[\xi_3] - (P')[p_1] - (Q')[p_2] - (R')[p_3],$$

$$\frac{B'}{\Delta} = \frac{B}{\Delta} = -(A')[\eta_1] - (B')[\eta_2] - (C')[\eta_3] - (P')[q_1] - (Q')[q_2] - (R')[q_3],$$

$$\frac{C'}{\Delta} = \frac{C}{\Delta} = -(A')[\zeta_1] - (B')[\zeta_2] - (C')[\zeta_3] - (P')[r_1] - (Q')[r_2] - (R')[r_3],$$

$$\frac{P'}{\Delta} = \frac{P}{\Delta} = [P] = \alpha(P') + \beta(Q') + \gamma(R'),$$

$$\frac{Q'}{\Delta} = \frac{Q}{\Delta} = [Q] = \alpha'(P') + \beta'(Q') + \gamma'(R'),$$

$$\frac{R'}{\Delta} = \frac{R}{\Delta} = [R] = \alpha''(P') + \beta''(Q') + \gamma''(R'),$$

$$p'_{xx} = -\sum \{[A_i][\xi_i] + [P_i][p_i]\}$$

$$p'_{yx} = -\sum \{[B_i][\xi_i] + [Q_i][p_i]\}$$

$$p'_{zx} = -\sum \{[C_i][\xi_i] + [R_i][p_i]\}$$

avec des formules analogues pour p'_{xy}, p'_{yy}, p'_{zy} ; p'_{xz}, p'_{yz}, p'_{zz} que l'on obtient en changeant $[\xi_i]$, $[p_i]$ respectivement en $[\eta_i]$, $[q_i]$, puis en $[\zeta_i]$, $[r_i]$, et en outre

$$q'_{xx} = \alpha[P_1] + \beta[P_2] + \gamma[P_3],$$
$$q'_{yx} = \alpha[Q_1] + \beta[Q_2] + \gamma[Q_3],$$
$$q'_{zx} = \alpha[R_1] + \beta[R_2] + \gamma[R_3],$$

avec des formules analogues pour q'_{xy}, q'_{yy}, q'_{zy} ; q'_{xz}, q'_{yz}, q'_{zz}, que l'on obtient en changeant α, β, γ respectivement en α', β', γ', puis en α'', β'', γ''.

Observons que

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{A'}{\Delta} = \frac{d}{dt}\frac{A'}{\Delta} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\frac{A'}{\Delta} - \frac{dy}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{A'}{\Delta} - \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{A'}{\Delta}$$

peut, en vertu de la relation

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{A'}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\frac{dA'}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{A'}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{A'}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{A'}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right);$$

de même

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{P'}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\frac{dP'}{dt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P'}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P'}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P'}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right).$$

D'autre part, $A' = A$, $P' = P$; il en résulte que l'on a :

$$\frac{\partial p'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p'_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{A'}{\Delta} + \frac{d\Omega}{dx} = \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta}\frac{dA}{dt},$$

et

$$\frac{\partial q'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q'_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q'_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{P'}{\Delta} + p'_{yz} - p'_{zy} = \frac{\partial q_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial q_{zx}}{\partial z} + \frac{1}{\Delta}\frac{dP}{dt} + p_{yz} - p_{zy} + \frac{C}{\Delta}\frac{dy}{dt} - \frac{B}{\Delta}\frac{dz}{dt},$$

avec des relations analogues.

La force et le moment extérieurs ont donc la même définition que dans les §§ **62**, **63** ; mais, *il n'en est pas ainsi pour l'effort et le moment de déformation ;* nous avons, d'après les §§ **72**, **76**

$$(93)\qquad \begin{cases} p_{xx} - p'_{xx} = \pi_{xx} = \Omega - \dfrac{A}{\Delta}\dfrac{dx}{dt}, \\ p_{yx} - p'_{yx} = \pi_{yx} = \quad - \dfrac{A}{\Delta}\dfrac{dy}{dt}, \\ p_{zx} - p'_{zx} = \pi_{zx} = \quad - \dfrac{A}{\Delta}\dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

avec des expressions analogues pour π_{xy}, π_{yy}, π_{zy} ; π_{xz}, π_{yz}, π_{zz} que l'on obtient par permutation circulaire de A, B, C et de x, y, z ; en outre

$$(93')\qquad \begin{cases} q_{xx} - q'_{xx} = \chi_{xx} = - \dfrac{P}{\Delta}\dfrac{dx}{dt}, \\ q_{yx} - q'_{yx} = \chi_{yx} = - \dfrac{P}{\Delta}\dfrac{dy}{dt}, \\ q_{zx} - q'_{zx} = \chi_{zx} = - \dfrac{P}{\Delta}\dfrac{dz}{dt}, \end{cases}$$

avec des expressions analogues pour χ_{xy}, χ_{yy}, χ_{zy} ; χ_{xz}, χ_{yz}, χ_{zz} que l'on obtient par permutation circulaire de P, Q, R et de x, y, z.

79. La méthode de l'action variable appliquée à la conception eulérienne de l'action exprimée avec les variables de Lagrange. — Nous allons encore développer la conception eulérienne de l'action avec les variables de Lagrange. Nous partons de l'intégrale

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{s_0} W dx_0 dy_0 dz_0 dt,$$

où actuellement le champ d'intégration par rapport à x_0, y_0, z_0 varie avec le temps t, et correspond au champ d'intégration fixe décrit par le point (x, y, z).

Suivant l'exposition de M. Jordan, nous avons :

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} W\,dx_0dy_0dz_0dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}\Big[\sum\Big(\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\,\delta\xi_i+\ldots+\frac{\partial W}{\partial r_i}\,\delta r_i\Big)+\frac{\partial W}{\partial\xi}\,\delta\xi+\ldots+\frac{\partial W}{\partial r}\,\delta r$$
$$+\frac{d}{dx_0}\Big(W(\delta x_0)\Big)+\frac{d}{dy_0}\Big(W(\delta y_0)\Big)+\frac{d}{dz_0}\Big(W(\delta z_0)\Big)\Big]\,dx_0dy_0dz_0dt,$$

où (δx_0), (δy_0), (δz_0) sont définis par les formules (86), au moyen des auxiliaires δx, δy, δz.

La suite des calculs ressemble à celle que nous avons rencontrée dans la dynamique du milieu déformable ; toutefois, une différence s'introduit, en ce qui concerne les dérivées par rapport au temps ; actuellement, on ne peut pas intervertir l'intégration par rapport au temps et l'intégration par rapport au champ des variables x_0, y_0, z_0. On appliquera donc un raisonnement analogue à celui du § 76. On n'introduira d'abord que des dérivées par rapport au temps de la forme $\frac{\partial}{\partial t}$, en utilisant la formule

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}=\frac{d\mathcal{F}}{dt}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial t},$$

où $\frac{\partial x_0}{\partial t}$, $\frac{\partial y_0}{\partial t}$, $\frac{\partial z_0}{\partial t}$ désignent les dérivées par rapport à t des fonctions x_0, y_0, z_0 de x, y, z, t que l'on tire des formules (66′). En utilisant les notations déjà introduites, la formule précédente peut s'écrire :

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}-(\xi)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x_0}-(\eta)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y_0}-(\zeta)\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_0}. \tag{94}$$

Si l'on a un terme de la forme

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} g\,\frac{\partial h}{\partial t}\,dx_0dy_0dz_0dt,$$

on l'écrira

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s} \frac{g}{\Delta}\,\frac{\partial h}{\partial t}\,dxdydzdt,$$

et, en intégrant par parties,

$$\iiint_{s}\Big\{\frac{g}{\Delta}\,h\Big\}_{t_1}^{t_2}dxdydz-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s} h\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g}{\Delta}\Big)\,dxdydzdt$$
$$=\Big\{\iiint_{s}\frac{g}{\Delta}\,h\,dxdydz\Big\}_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s} h\,\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{g}{\Delta}\Big)\,dxdydzdt,$$

c'est-à-dire, en revenant aux variables x_0, y_0, z_0,

$$\left\{\iiint_{s_0} ghdx_0dy_0dz_0\right\}_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} h\Delta\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{\Delta}\right)dx_0dy_0dz_0dt.$$

Ceci posé, d'après les formules antérieures de la dynamique du milieu déformable et d'après (94), il vient, par des intégrations par parties,

$$\begin{aligned}
&\delta\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0} W\,dx_0dy_0dz_0dt\\
&=\int_{t_1}^{t_2}\iint_{s_0}(F_0'\delta'x + G_0'\delta'y + H_0'\delta'z + I_0'\delta\imath' + J'_0\delta\jmath' + K'_0\delta\kappa')\,d\sigma_0dt\\
&+\left\{\iiint_{s_0}(A'\delta'x + B'\delta'y + C'\delta'z + P'\delta\imath' + Q'\delta\jmath' + R'\delta\kappa')\,dx_0dy_0dz_0\right\}_{t_1}^{t_2}\\
&-\int_{t_1}^{t_2}\iiint_{s_0}(X_0'\delta'x + Y_0'\delta'y + Z_0'\delta'z + L'_0\delta\imath' + M_0'\delta\jmath' + N_0'\delta\kappa')\,dx_0dy_0dz_0dt,
\end{aligned}$$

en posant

$$F'_0 = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\xi_1} - (\xi_1)W - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\xi_2} - (\xi_2)W - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\xi_3} - (\xi_3)W - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right\},$$

$$G'_0 = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\eta_1} - (\eta_1)W - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\eta_2} - (\eta_2)W - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\eta_3} - (\eta_3)W - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right\},$$

$$H_0' = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\zeta_1} - (\zeta_1)W - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\zeta_2} - (\zeta_2)W - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial\zeta_3} - (\xi_3)W - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right\},$$

$$I_0' = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial p_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial p}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial p_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial p}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial p_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial p}\right\},$$

$$J_0' = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial q_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial q}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial q_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial q}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial q_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial q}\right\},$$

$$K_0' = l_0\left\{\frac{\partial W}{\partial r_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial r}\right\} + m_0\left\{\frac{\partial W}{\partial r_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial r}\right\} + n_0\left\{\frac{\partial W}{\partial r_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial r}\right\},$$

$$\begin{aligned}
X_0' &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\xi_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)\\
&\quad + \sum\left(q_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i} - r_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i}\right) + \Delta\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) + q\frac{\partial W}{\partial\zeta} - r\frac{\partial W}{\partial\eta},\\
Y_0' &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\eta_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\eta_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\eta_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)\\
&\quad + \sum\left(r_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i} - p_i\frac{\partial W}{\partial\zeta_i}\right) + \Delta\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial\eta}\right) + r\frac{\partial W}{\partial\xi} - p\frac{\partial W}{\partial\zeta},\\
Z_0' &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial\zeta_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right)\\
&\quad + \sum\left(p_i\frac{\partial W}{\partial\eta_i} - q_i\frac{\partial W}{\partial\xi_i}\right) + \Delta\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial\zeta}\right) + p\frac{\partial W}{\partial\eta} - q\frac{\partial W}{\partial\xi},\\
L_0' &= \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial p_1} - (\xi)\frac{\partial W}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial p_2} - (\eta)\frac{\partial W}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial p_3} - (\zeta)\frac{\partial W}{\partial p}\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum\left(q_i\frac{\partial W}{\partial r_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial q_i}+\eta_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)+\Delta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial p}\right)+q\frac{\partial W}{\partial r}-r\frac{\partial W}{\partial q}+\eta\frac{\partial W}{\partial \zeta}-\zeta\frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

$$M'_0=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}-(\xi)\frac{\partial W}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}-(\eta)\frac{\partial W}{\partial q}\right)+\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}-(\zeta)\frac{\partial W}{\partial q}\right)$$

$$+\sum\left(r_i\frac{\partial W}{\partial p_i}-p_i\frac{\partial W}{\partial r_i}+\zeta_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i}-\xi_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}\right)+\Delta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial q}\right)+r\frac{\partial W}{\partial p}-p\frac{\partial W}{\partial r}+\zeta\frac{\partial W}{\partial \xi}-\xi\frac{\partial W}{\partial \zeta},$$

$$N'_0=\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial W}{\partial r_1}-(\xi)\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial y_0}\left(\frac{\partial W}{\partial r_2}-(\eta)\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z_0}\left(\frac{\partial W}{\partial r_3}-(\zeta)\frac{\partial W}{\partial r}\right)$$

$$+\sum\left(p_i\frac{\partial W}{\partial q_i}-q_i\frac{\partial W}{\partial p_i}+\xi_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}-\eta_i\frac{\partial W}{\partial \xi_i}\right)+\Delta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial W}{\partial r}\right)+p\frac{\partial W}{\partial q}-q\frac{\partial W}{\partial p}+\xi\frac{\partial W}{\partial \eta}-\eta\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

Nous pouvons observer que X_0', par exemple, peut s'écrire, en vertu de (94),

$$X_0'=\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \xi_i}+q_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \xi}+q\frac{\partial W}{\partial \zeta}-r\frac{\partial W}{\partial \eta}$$
$$-\left(\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}+\frac{\partial(\xi)}{\partial x_0}+\frac{\partial(\eta)}{\partial y_0}+\frac{\partial(\zeta)}{\partial z_0}\right)\frac{\partial W}{\partial \xi};$$

or on a

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial t}=-\left(\frac{\partial(\xi)}{\partial x_0}+\frac{\partial(\eta)}{\partial y_0}+\frac{\partial(\zeta)}{\partial z_0}\right),$$

et par suite X_0' *a la même valeur*

$$X_0'=\sum\left(\frac{\partial}{\partial \rho_i}\frac{\partial W}{\partial \xi_i}+q_i\frac{\partial W}{\partial \zeta_i}-r_i\frac{\partial W}{\partial \eta_i}\right)+\frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \xi}+q\frac{\partial W}{\partial \zeta}-r\frac{\partial W}{\partial \eta}$$

que dans le § **62** ; *la même remarque s'applique à* Y_0', Z_0', L_0', M_0', N_0'. Mais, *il n'en est pas ainsi pour l'effort et le moment de déformation* ; par des transformations faciles, on retrouve encore les relations (93) et (93′) du § **78**.

80. La notion de radiation de l'énergie de déformation et de mouvement. — Nous avons vu que la densité de l'énergie de déformation et de mouvement, exprimée en fonction des arguments lagrangiens et rapportée à l'espace (x_0, y_0, z_0), est

$$(95)\qquad E=\xi\frac{\partial W}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial W}{\partial \eta}+\zeta\frac{\partial W}{\partial \zeta}+p\frac{\partial W}{\partial p}+q\frac{\partial W}{\partial q}+r\frac{\partial W}{\partial r}-W;$$

cette même densité, *rapportée à l'espace* (x, y, z) et exprimée au moyen de la fonction Ω des arguments eulériens (ξ_i), (η_i), (ζ_i), (p_i), (q_i), (r_i) ; (ξ), (η), (ζ), (p), (q), (r) est

$$(96)\qquad \frac{E}{\Delta}=(\xi)\frac{\partial \Omega}{\partial(\xi)}+(\eta)\frac{\partial \Omega}{\partial(\eta)}+(\zeta)\frac{\partial \Omega}{\partial(\zeta)}+(p)\frac{\partial \Omega}{\partial(p)}+(q)\frac{\partial \Omega}{\partial(q)}+(r)\frac{\partial \Omega}{\partial(r)}-\Omega.$$

Ce résultat s'obtient soit en transformant l'expression (95) au moyen des relations que nous avons indiquées précédemment entre les arguments lagran-

giens et les arguments eulériens, soit en répétant directement le raisonnement du § **65** sur le travail élémentaire

$$dt\left\{\iiint_{s_0}(\xi X_0' + \eta Y_0' + \zeta Z_0' + pL_0' + qM_0' + rN_0')dx_0dy_0dz_0 - \iint_{s_0}(\xi F_0' + \eta G_0' + \zeta H_0' + pI_0' + qJ_0' + rK_0')d\sigma_0\right\}$$

des forces et moments extérieurs et des efforts et moments de déformation extérieurs, s'exerçant sur la portion (M) du milieu qu'occupe à l'instant t la portion (M_0) de l'état naturel. Nous retrouvons, par cette dernière voie, pour ce travail élémentaire, l'expression

$$dt\left\{\iiint_{s_0}\frac{dE}{dt}dx_0dy_0dz_0\right\},$$

Ω étant supposé indépendant de t.

Si nous observons qu'on a l'identité suivante :

$$\frac{1}{\Delta}\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E}{\Delta}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right),$$

employée par M. Poincaré, dans le mémoire que nous avons cité au § **77**, et qui s'applique à une fonction quelconque, nous arrivons, pour le travail élémentaire considéré, à la nouvelle expression suivante :

$$dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_s\frac{E}{\Delta}dxdydz + \iiint_s\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dx}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dy}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{E}{\Delta}\frac{dz}{dt}\right)\right]dxdydz\right\},$$

ou

$$(97)\qquad dt\left\{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_s\frac{E}{\Delta}dxdydz + \iint_s\frac{E}{\Delta}\left(l\frac{dx}{dt} + m\frac{dy}{dt} + n\frac{dz}{dt}\right)d\sigma\right\}.$$

La seconde intégrale dans (97) exprime le *flux d'énergie de déformation et de mouvement* à travers une *surface fixe* S dans le corps déformé.

Considérons maintenant la conception eulérienne de l'action. Nous avons constaté, dans les §§ précédents, que les valeurs des forces et moments extérieurs restent les mêmes, mais que dans les expressions des efforts p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, disparaissent les termes suivants :

$$\pi_{xx} = \Omega - \frac{A}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$\pi_{xy} = -\frac{B}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

$$\pi_{xz} = -\frac{C}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

et, dans les expressions des moments de déformation q_{xx}, q_{xy}, q_{xz}, les termes suivants :

$$\chi_{xx} = -\frac{P}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$
$$\chi_{xy} = -\frac{Q}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$
$$\chi_{xz} = -\frac{R}{\Delta}\frac{dx}{dt},$$

avec des expressions analogues pour les quantités π_{yx}, π_{yy}, π_{yz}, π_{zx}, π_{zy}, π_{zz} et χ_{yx}, χ_{yy}, χ_{yz}, χ_{zx}, χ_{zy}, χ_{zz}. Il résulte de là qu'au travail élémentaire obtenu dans le cas précédent doit s'ajouter une nouvelle intégrale de surface, qui a pour expression

$$dt\left\{\iint_S \left(l\frac{dx}{dt}+m\frac{dy}{dt}+n\frac{dz}{dt}\right)\left[\Omega-\frac{1}{\Delta}\left(A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left\{p(P')+q(Q')+r(R')\right\}\right]d\sigma\right\}.$$

On pourrait appeler cette nouvelle intégrale le *flux d'énergie rayonnante à travers la frontière S du corps déformé.*

Le raisonnement fait au § **64** et fondé sur l'*invariance euclidienne* de la densité d'action, ne conduit plus à l'égard des forces et des moments extérieurs, ainsi qu'à l'égard des *nouveaux* efforts et moments de déformation extérieurs, aux mêmes conclusions ; c'est ce qu'on peut interpréter en disant que les nouveaux efforts et moments de déformation ne satisfont plus à ce que M. Poincaré a appelé le *principe de réaction.* Cette dernière conclusion se retrouve également, comme on le sait, dans les théories électriques de M. Lorentz. Mais l'existence du rayonnement que nous avons mis en évidence permet de rapprocher les efforts et moments de déformation π_{xx}, π_{yx}, ..., χ_{xx}, χ_{yx}, ... de ce que Maxwell, d'après des considérations tirées de la théorie électromagnétique de la lumière, et Bartoli, d'après la Thermodynamique, ont appelé la *pression de l'énergie rayonnante*, et on peut ainsi respecter de nouveau le *principe de réaction.*

TABLE DES MATIÈRES

Pages

AVANT-PROPOS v

I. — Considérations générales.

1. Développement de l'idée de milieu continu. 1
2. Difficultés que présente l'application de la méthode inductive dans la Mécanique 2
3. Théorie de l'action euclidienne. 3
4. La critique des principes de la Mécanique. 5

II. — Statique de la ligne déformable.

5. Ligne déformable. Etat naturel et état déformé 6
6. Eléments cinématiques relatifs aux états de la ligne déformable 6
7. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé 7
8. Action euclidienne de déformation sur une ligne déformable 8
9. La force et le moment extérieurs, l'effort et le moment de déformation, en un point d'une ligne déformée 10
10. Relations entre les éléments définis au § précédent ; transformations diverses de ces relations 13
11. Travail virtuel extérieur. Théorème de Varignon. Remarques sur les auxiliaires introduites dans le paragraphe précédent 18
12. Notion de l'énergie de déformation 20
13. Etat naturel de la ligne déformable. Indications générales sur les problèmes auxquels conduit la considération de cette ligne 20
14. Forme normale des équations de la ligne déformable, lorsque la force et le moment extérieurs sont donnés comme de simples fonctions de s_0 et des éléments qui fixent la position du trièdre $Mx'y'z'$. Principe du travail minimum de Castigliano 24

Pages

15. Notions du trièdre caché et du W caché 30
16. Cas où W ne dépend que de s_0, ξ, η, ζ. Comment on retrouve les équations de la théorie de la ligne flexible et extensible de Lagrange. . . 31
17. Le fil flexible et inextensible 33
18. Cas où W ne dépend que de s_0, ξ, η, ζ et où $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}_0$ ne sont pas tous nuls 35
19. Cas où W ne dépend que de s_0, p, q, r. 35
20. Cas où W est une fonction de s_0, ξ, η, ζ, p, q, r, dépendant de ξ, η, ζ seulement par l'intermédiaire de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ou, ce qui revient au même, par l'intermédiaire de $\mu = \frac{ds}{ds_0} - 1$ 36
21. La ligne déformable obtenue en supposant que Mx' est la tangente en M à (M) 37
22. Réduction du système du § précédent à une forme que l'on peut déduire du calcul des variations 42
23. La ligne déformable inextensible où Mx' est la tangente en M à (M). . . 45
24. Cas où les forces et les moments extérieurs sont nuls ; forme particulière de W conduisant aux équations traitées par Binet et Wantzel 46
25. La ligne déformable où le plan $Mx'y'$ est le plan osculateur de (M) en M ; cas où la ligne est en outre inextensible ; la ligne considérée par Lagrange et sa généralisation due à Binet et étudiée par Poisson 49
26. Les déformées rectilignes d'une ligne déformable. 53
27. La ligne déformable obtenue par l'adjonction des conditions $p = p_0$, $q = q_0$, $r = r_0$, et en particulier $p = p_0 = 0$, $q = q_0 = 0$, $r = r_0 = 0$ . . 54
28. Ligne déformable soumise à des liaisons. Equations canoniques 55
29. Etat infiniment voisin de l'état naturel. Modules de déformation hamiltoniens et modules de déformation de Hooke. Valeurs critiques des modules. 63

III. — Statique de la surface déformable et dynamique de la ligne déformable.

30. Surface déformable. Etat naturel et état déformé. 65
31. Eléments cinématiques relatifs aux états de la surface déformable. . . . 66
32. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé. 67
33. Action euclidienne de déformation sur une surface déformable 68
34. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort et le moment de déformation en un point d'une surface déformée. 71
35. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation 75
36. Remarques relatives aux composantes S_1, S_2, S_3 et $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$. 81
37. Equations obtenues en introduisant, à l'exemple de Poisson, les coordonnées x, y comme variables indépendantes à la place de ρ_1, ρ_2 85
38. Introduction de nouvelles auxiliaires fournies par la considération des trièdres non trirectangles formés de Mx'_1 et des tangentes aux courbes (ρ_1) et (ρ_2). 89
39. Travail virtuel extérieur ; théorème analogue à celui de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents 90

Pages

40. Notion de l'énergie de déformation. Etat naturel de la surface déformable. 92
41. Notion du trièdre caché et du W caché. 93
42. Cas où W ne dépend que de ρ_1, ρ_2, ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2. La surface qui, dans le cas de la déformation infiniment petite, conduit à la membrane étudiée par Poisson et Lamé 94
43. La surface flexible et inextensible des géomètres. La surface fluide imcompressible. La surface de M. Daniele 100
44. Quelques indications bibliographiques sur la surface flexible et inextensible des géomètres. 103
45. La surface déformable obtenue en supposant que Mz' est normal à la surface (M). 105
46. Réduction du système du paragraphe précédent à une forme analogue à celle qui se présente dans le calcul des variations 110
47. Dynamique de la ligne déformable 121

IV. — Statique et dynamique du milieu déformable.

48. Milieu déformable. Etat naturel et état déformé 122
49. Eléments cinématiques relatifs aux états du milieu déformable 122
50. Expressions des variations des vitesses de translation et de rotation du trièdre relatif à l'état déformé 123
51. Action euclidienne de déformation sur un milieu déformable 125
52. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort et le moment de déformation en un point du milieu déformé 127
53. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation 130
54. Travail virtuel extérieur ; théorème analogue à ceux de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents 138
55. Notion de l'énergie de déformation. Théorème qui conduit, comme cas particulier, à celui de Clapeyron. 141
56. Etat naturel du milieu déformable 143
57. Notions de trièdre caché et du W caché. 146
58. Cas où W ne dépend que de x_0, y_0, z_0, ξ_i, η_i, ζ_i et est indépendant de p_i, q_i, r_i. Comment on retrouve les équations relatives au corps déformable de la théorie classique et au milieu de l'hydrostatique 147
59. Le corps invariable 151
60. Milieu déformable en mouvement 154
61. Action euclidienne de déformation et de mouvement sur un milieu déformable en mouvement 156
62. La force et le moment extérieurs ; l'effort et le moment de déformation extérieurs ; l'effort, le moment de déformation, la quantité de mouvement et le moment de quantité de mouvement du milieu déformé en mouvement, en un point et à un instant donnés 157
63. Spécifications diverses de l'effort et du moment de déformation, de la quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement. . . 160
64. Travail virtuel extérieur ; théorème analogue à ceux de Varignon et de Saint-Guilhem. Remarques sur les auxiliaires introduites dans les paragraphes précédents 167
65. Notion de l'énergie de déformation et de mouvement 171

Pages

66. Etat initial et états naturels de déformation et de mouvement 172
67. Notions du trièdre caché et du W caché. Cas où W ne dépend que de $x_0, y_0, z_0, t, \xi_i, \eta_i, \zeta_i, \xi, \eta, \zeta$ et est indépendant de p_i, q_i, r_i, p, q, r. Extension de la dynamique du corps déformable classique. Le milieu gyrostatique et l'anisotropie cinétique 174

V. — L'action euclidienne à distance. L'action de contrainte et l'action dissipative.

68. Action euclidienne de déformation et de mouvement sur un milieu non continu. 178
69. L'action euclidienne de contrainte et l'action euclidienne dissipative. . . 184

VI. — L'action euclidienne au point de vue eulérien.

70. Les variables indépendantes de Lagrange et d'Euler. Les auxiliaires considérées suivant le point de vue de l'hydrodynamique. 187
71. Expressions de $\xi_i, \ldots, r_i$ (ou de $\xi_i, \ldots, r_i, \xi, \ldots, r$) au moyen des fonctions $x_0, y_0, z_0, \alpha, \alpha', \ldots, \gamma''$ de x, y, z (ou de x, y, z, t) et de leurs dérivées; introduction des arguments eulériens 189
72. Equations de la statique du milieu déformable relatives aux variables d'Euler et déduites d'abord des équations obtenues avec les variables de Lagrange. 194
73. Equations de la dynamique du milieu déformable relatives aux variables d'Euler et déduites d'abord des équations obtenues avec les variables de Lagrange 196
74. Variations des arguments eulériens déduites de celles des arguments lagrangiens 199
75. Variations des arguments eulériens déterminées directement 203
76. L'action de déformation et de mouvement avec les variables d'Euler. Invariance des arguments eulériens. Application de la méthode de l'action variable. 205
77. Remarques sur les variations introduites dans les paragraphes précédents. Application de la méthode de l'action variable suivant le procédé habituel du calcul des variations 209
78. Les conceptions lagrangienne et eulérienne de l'action. La méthode de l'action variable appliquée à la conception eulérienne de l'action exprimée avec les variables d'Euler. 212
79. La méthode de l'action variable appliquée à la conception eulérienne de l'action exprimée avec les variables de Lagrange 216
80. La notion de radiation de l'énergie de déformation et de mouvement . . 219

ERRATA

—

Pages :	*lignes :*	*au lieu de :*	*lisez :*
3	dernière ligne	Tome I, page 236	dans le Traité de Physique de Chwolson, Tome I, page 236.
12	»	Tome I, pages 260 et 269	dans le Traité de Physique de Chwolson, Tome I, pages 260 et 269.
15	16	σ'	σ_3'
18	3	travail	travail virtuel
»	5	intervertir A_0 et B_0.	
19	12	δ'_I, δ'_J, δ'_K	δ_I, δ_J, δ_K
22	19	ajouter)	
25	12	$\frac{dx'}{ds'_0}$	$\frac{dx'}{ds_0}$
52	26	dû	due
65	dernière ligne	Tome I, page 261	dans le Traité de Physique de Chwolson, Tome I, page 261.
88	9	$) + A_1^{(1)} ($	$) A_1^{(1)} + ($
88	10	$) + B_1^{(1)} ($	$) B_1^{(1)} + ($
105	3e ligne en remontant	page 1 042	page 90.
107	21	Δ_9	Δ_0.
202	9	page 1 152	page 200.

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

6

A LA MÊME LIBRAIRIE

LADENBURG (A.). — Histoire du développement de la Chimie depuis Lavoisier jusqu'à nos jours, trad. **CORVISY** 1909 . . . . . **15** fr. » »

DUHEM (P.). — Les sources des Théories physiques. Les origines de la Statique. 2 vol., 1905-1906. . . . . **20** fr. » »

CHWOLSON (O. D.). — Traité de Physique, trad. **Ed. DAVAUX**. 4 vol. grand in-8, se vendant séparément. Tome I. 1908. 1050 pages . . . . . **42** fr. » »

Tome II, Optique. 1909. 1 185 pages . . . . . **42** fr. » »

KŒNIGS (G.). — Leçons de Cinématique théorique, avec notes de MM. DARBOUX et COSSERAT. Grand in-8, 500 pages. 1897 . . . . . **15** fr. » »

GOURSAT (E.). — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. 2 volumes grand in-8, 1896-98 . . . . . **18** fr. » »

BRILLOUIN (M.). — Leçons professées au Collège de France sur la propagation de l'Électricité, Histoire et théorie. 400 pages. Nombreuses figures et planches, grand in-8°, 1903. **15** fr. » »

HADAMARD (J.). — Leçons professées au Collège de France sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique, grand in-8, 400 pages, figures. 1903 . . . **18** fr. » »

DUHEM (P.). — L'Évolution de la Mécanique, in-8, 350 pages. 1903. . . . . **5** fr. » »

TANNERY (J.). — Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable. 2me édition en 2 volumes. Tome I, 1904 . **14** fr. » »

MACH (E.). — La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement. Trad. sur la 4e édit. par **Ed. BERTRAND** (avec introduction de Em. PICARD), 500 pages avec figures et portraits, 1904 . . . . . **15** fr. » »

ROUSE BALL (W.). — Histoire des Mathématiques. Traduction **FREUND**. 2 vol. grand in-8, 1906-1908 . . . . **20** fr. » »

MAILLARD. — Cours d'Astronomie de l'Université de Lausanne. Tome I, 1906. . . . . **7** fr. **50**

GRUEY (L.-J.). — Exercices astronomiques, grand in-8, 346 p., 22 pl. gravées. . . . . **15** fr. » »

D'ABBADIE (A.). — Géodésie d'Éthiopie ou triangulation d'une partie de la Haute-Éthiopie, publié par R. Radau. Grand in-4 de 504 pages, avec 11 cartes et 10 planches . . . . . **30** fr. » »

LAMÉ (G. — Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. Réimpression fac-similé (1903) de ce rarissime ouvrage . . . . . **5** fr. » »

ROUSE BALL. – Récréations mathématiques 2 vols. **10** fr. » »

FABRY (E.). — Traité de Mathématiques générales, avec préface de M. DARBOUX. 1908, (480 pages). . . . . **9** fr. » »

LE CHATELIER. — Leçons sur le carbone, la combustion et les lois chimiques. 1908. . . . . **12** fr. » »

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE

Made in the USA

The Cornell University Library Digital Collections

This volume is part of an extensive collection of digital texts and images that have been created and curated by Cornell University Library since 1992. Now widely available and preserved for the enjoyment and learning of future generations thanks to the Library's pioneering digitization efforts, these collections represent a rich cultural heritage of scholarly material on a variety of topics including the American Civil War and the abolitionist movement; 19th and early 20th century texts in home economics, agriculture, animal science, food science, and rural sociology; historical western travel narratives of Southeast Asia; and important historical works in science and mathematics.

To access this and other works in the Cornell University Library Digital Collections, please see www.library.cornell.edu.

Cornell University Library is a national leader in the creation and management of digital materials and resources.

Cornell University
Library